Министерство образования и науки Украины

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

В. С. Рыжий

И. Г. Николенко

ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ ВТОРОЙ ПОЛОВИНЫ XIX ВЕКА

Харьков – 2019

УДК 51 (091)
ББК 22.1
Р93

Рецензенты:

В. А. Резуненко – кандидат физ.-мат. наук, доцент Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина;

А. И. Даниленко – доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Физико-технического института низких температур имени Б. И. Веркина НАН Украины

Утверждено к печати решением Ученого совета
Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина
(протокол № от)

Рижий В. С.
Р93 Нариси з історії математики другої половини XIX століття: наукове видання / В. С. Рижий, І. Г. Ніколенко. – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2019. – с.
ISBN

У цих нарисах у хронологічній послідовності викладено біографічні відомості і основні досягнення в різних областях математики найвидатніших математиків другої половини XIX століття, а також історія нових напрямків у алгебрі і інших питань цього періоду. Подано широку бібліографію з історії математики.

Для викладачів, наукових працівників, а також для аспірантів і студентів математичних спеціальностей.

Рыжий В. С.
Р93 Очерки по истории математики второй половины XIX века: научное издание / В. С. Рыжий, И. Г. Николенко. – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2019. – с.
ISBN

В очерках в хронологической последовательности изложены биографические сведения и основные достижения в различных областях математики самых выдающихся математиков второй половины XIX века, а также история новых направлений в алгебре и других вопросов этого периода. Приведена обширная библиография по истории математики.

Для преподавателей, научных работников, а также для аспирантов и студентов математических специальностей.

УДК 51 (091)
ББК 22.1г

ISBN

От авторов

Предлагаемая книга является продолжением нашей книги [289], посвященной истории математики первой половины XIX в. Тот век, а особенно вторая его половина, представляет собой переход к современной математике. Перечислим самые главные достижения в математике второй половины XIX века, о которых говорится в нашей книге.

В математическом анализе утвердились рассуждения «на языке $\varepsilon-\delta$», широкое использование равномерной сходимости рядов (К. Вейерштрасс), введено понятие равномерной непрерывности функции (Э. Гейне). Построены три различные теории действительных чисел (К. Вейерштрасс, Г. Кантор, Р. Дедекинд). Введена и разработана теория интеграла Римана. Построены примеры непрерывных функций, не имеющих производных (К. Вейерштрасс и др.). П. Л. Чебышев разработал теорию наилучшего приближения функций. А. Пуанкаре ввел внешние дифференциальные формы и с их помощью дал многомерное обобщение формулы Стокса.

Теория функций комплексного переменного (теория аналитических функций) продолжала развиваться, превращаясь в отдельную математическую дисциплину (Б. Риман, К. Вейерштрасс, А. Пуанкаре и др.). Исследованы абелевы интегралы (Б. Риман), абелевы функции (К. Вейерштрасс, А. Пуанкаре). К. Вейерштрасс ввел новые эллиптические функции. Построена теория автоморфных фукций (А. Пуанкаре, Ф. Клейн). А. Пуанкаре исследовал вопрос об униформизации многозначных аналитических функций автоморфными функциями.

В теории дифференциальных уравнений построен новый раздел – качественная теория дифференциальных уравнений (А. Пуанкаре). Построена теория устойчивости (А. М. Ляпунов, А. Пуанкаре). Систематизированы, уточнены и изложены в лекциях методы решения дифференциальных уравнений в частных производных математической физике (Б. Риман, А. Пуанкаре). Создана аналитическая теория дифференциальных уравнений (ее история подробно изложена в книге [156]).

Алгебра во второй половине XIX в. сделала резкий скачок, превращаясь в современную алгебру. Возникла линейная алгебра. Начала развиваться теория групп (А. Кэли, К. Жоржан, Ф. Клейн, С. Ли, Г. Вебер, Ф. Фробениус). Разработана алгебраическая теория инвариантов. Р. Дедекинд ввел для числовых систем понятия поля, кольца, модуля и идеала. Возникла теория алгебраических чисел (Э. Куммер,

Р. Дедекинд, Л. Кронекер). Даны современные изложения теории Галуа (К. Жордан, Р. Дедекинд). Возникла некоммутативная алгебра.

Б. Риман и П. Л. Чебышев разрабатывали вопрос об асимптотическом законе распределения простых чисел. Аксиоматизирована арифметика (Р. Дедекинд, Дж.Пеано).

В геометрии добавились риманова геометрия и геометрия Римана (эллиптическая). Ф. Клейн дал групповую классификацию геометрий. А. Пуанкаре привел интерпретацию геометрии Лобачевского. Д. Гильберт дал аксиоматику трехмерной евклидовой геометрии.

Возникла новая математическая дисциплина – топология. Б. Риман и Э. Бетти начали здесь изучать вопрос о связаности, а А. Пуанкаре построил комбинаторную топологию.

Г. Кантор построил основы новой науки – теории множеств.

В теории вероятностей П. Л. Чебышев использовал понятие случайной величины, обобщил закон больших чисел и доказал центральную предельную теорему.

В вариационном исчислении К. Вейерштрасс дал достаточное условие сильного экстремума функционалов.

В нашей книге отдельные очерки посвящены лишь самым знаменитым математикам второй половины XIX в., но в них, а также в остальном тексте, приводятся сведения о многих выдающихся математиках этого периода. Насколько нам известно, книг, посвященных специально истории математики второй половины XIX в. в целом нет. В книгах «Математика XIX века» [107–109], а также в книге Ф. Клейна [140] содержится и материал по истории математики второй половины XIX в. Там он излагается по отдельным математическим дисциплинам. Отдельные сведения об этом периоде имеются во многих книгах, на которые мы ссылались при написании очерков. Данная книга завершает ряд наших книг по истории математики [243, 234, 289], начиная с периода древности.

ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ ВТОРОЙ ПОЛОВИНЫ XIX ВЕКА

Возникновение понятия n-мерного пространства и геометрии в нем

После открытия иррациональных чисел древние греки, начиная с V в. до н. э. и до Герона (I в. н. э.), пользовались трехмерной геометрической алгеброй. Для Герона алгебра носила вычислительный характер, как и у древних вавилонян. В его «Метрике» впервые появляется 4-я степень, которую он называет «квадрато-квадратом». Диофант (III в.) в своей «Арифметике» чисто алгебраически трактует уравнения и системы уравнений, введя степени от -6-й до 6-й, хотя в названиях степеней использует геометрические термины («квадрат», «куб», «квадрото-квадрат», «квадрото-куб», «кубо-куб» соответственно для x^2, x^3, x^4, x^5, x^6). Папп (III в.) все еще строго придерживается геометрической алгебры. «Не существует ничего, что заключало бы более чем три измерения», – утверждает он. Однако он отмечает, что некоторое время тому назад стали позволять себе говорить о более высоких измерениях, «не указывая впрочем при этом на что-либо сколько-нибудь вразумительное», т. е. имеющее геометрический смысл. Геометрическая терминология в названиях степеней выше 3-й в определенном смысле расширяла понятие измерения пространства. Она частично сохранялась и в средние века, и в первой половине XVII в., но с введением Декартом в его «Геометрии» (1637) современных обозначений степеней этот смысл был утрачен. В XVIII в. Д’Аламбер в статье «Размерность», помещенной в знаменитой «Энциклопедии» в 1764 г. писал: «Один известный мне умный человек считает, что можно было бы рассматривать время как четвертое измерение…; эта идея, быть может, является спорной, но мне кажется, что она имеет некоторые достоинства, во всяком случае достоинство новизны» [51, с. 172]. Формально это четырехмерное пространство впервые использовал Лагранж при решении некоторых задач механики.

В XIX в. широкое использование функций многих переменных в различных вопросах математики (системы уравнений, квадратичные формы со многими переменными, n-кратные интегралы) приводит к понятию n-мерного пространства и геометрии в нем. Якоби в работе 1834 г. в случае n переменных по существу находит условия ортогональности матрицы линейной подстановки, не вводя, впрочем,

понятий матрицы и ее ортогональности, а затем решает задачу одновременного приведения двух квадратичных форм от n переменных к каноническому виду. В конце работы он решает ряд задач на вычисление кратных интегралов, в частности вычисляет $(n-1)$-кратный интеграл, в котором положительные действительные переменные $x_1,\ldots,x_n$ связаны соотношением $x_1^2+\ldots+x_n^2=1$. Фактически он находит объем поверхности той части $(n-1)$-мерной сферы единичного радиуса в n-мерном евклидовом пространстве, которая расположена в области $x_i \geq 0$, $i=1,\ldots,n$. Но он не интерпретирует этот результат геометрически. В 1835 г. Остроградский обобщает на n-мерный случай свою формулу, выражающую интеграл по области через интеграл по границе этой области. Но он также не говорит об n-мерной области интегрирования.

Термин «геометрия n измерений» впервые появляется в работе английского математика **Артура Кэли (1821–1895)** «Главы аналитической геометрии n измерений» (1843). Но этот термин фигурирует только в заголовке работы, а изложение носит алгебраический характер. Здесь рассматриваются системы линейных однородных алгебраических уравнений n переменных и «взаимные» к ним, а результат выражает одну из теорем многомерной проективной геометрии, но в алгебраической форме, так как проективная многомерная терминология еще отсутствовала. В конце работы Кэли формулирует свой результат для частного случая – поверхностей 2-го порядка в трехмерном проективном пространстве.

Понятие геометрического пространства впервые распространил за пределы трех измерений немецкий математик **Герман Гюнтер Грассман (Грасман, 1809–1877)** в книге «Учение о линейном протяжении» (1844). Он родился в г. Штеттин (ныне Щецин в Польше) в семье пастора, изучал в Берлине богословие и философию, а затем стал самостоятельно заниматься математикой. Сначала он работал учителем математики в Берлине, а с 1836 г. и до конца жизни – в Штеттине учителем математики в гимназии, очень продуктивно занимаясь также физикой, филологией и многосторонней общественной деятельностью. Но выдающимся математиком он был признан только через 20 лет после его смерти.

Грассман относит к геометрии только геометрию первых трех измерений, а свою теорию многомерных пространств считает абстрактным «учением о протяжении». В геометрии прямую он представляет как результат непрерывного

движения точки в заданном (и противоположном ему) направлении, плоскость – как результат движения прямой в направлении, «в прямой не содержащемся (или противоположном ему)», трехмерное пространство образуется аналогично в результате движения плоскости. «Дальше геометрия не идет, но абстрактная наука не знает границ», – пишет он и полагает, что аналогично получаются и пространства более высоких размерностей. В весьма абстрактной форме Грассман определяет многообразия различных размерностей – «протяженные образы» и «системы (или области)» различных ступеней. Под «протяженным образом первой ступени» понимается то, что мы бы назвали объектом любой природы, гомеоморфным отрезку и снабженным ориентацией. «Система первой ступени» гомеоморфна прямой. Эти одномерные объекты представляют собой аналоги непрерывной ориентированной кривой. «Протяженные образы и системы второй ступени» – аналоги ориентированной двумерной поверхности и т. д. Общее понятие многомерного «протяжения» Грассмана представляет собой пространство любого числа измерений. Книга Грассмана, написанная в абстрактном философском стиле, без формул, не привлекла внимания математиков, и он переработал ее, опубликовав под названием «Учение о протяжении» (1862), где вводит огромное количество новых терминов, а также формул. Обе книги написаны в форме, мало доступной для чтения.

Кроме элементов теории многообразий («протяжений») переработанная книга Грассмана содержит элементы векторной алгебры. В качестве «величин» Грассман рассматривает «единицы» – линейно независимые базисные элементы и «экстенсивные величины» – линейные комбинации базисных элементов. Экстенсивные величины вида $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, по существу, являются векторами абстрактного линейного пространства, с ними Грассман связывает и конкретное представление с помощью направленного отрезка, который он называет *Strecke*. Термин «вектор» ввел ирландский математик У. Р. Гамильтон в 1845 г. «Внутреннее произведение» экстенсивных величин вида $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ (векторов) у Грассмана совпадает со скалярным произведением векторов. Кроме того, для экстенсивных величин Грассман ввел «внешние произведения», которые обладают свойством кососимметричности, т. е. меняют знак при перестановке любых двух сомножителей:

$$[x_1x_2] = -[x_2x_1], \quad [x_1x_2x_3] = -[x_2x_1x_3] = -[x_3x_2x_1] = \dots,$$

и т. д., а произведения обращаются в нуль в случае равенства или линейной зависимости сомножителей. В частности, внешнее произведение двух векторов представляет их векторное произведение. В общем случае экстенсивные величины Грассмана можно записать в виде

$$a + \sum_{i=1}^{n} a_i e_i + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij}[e_i e_j] + \sum_{1 \le i < j < k \le n} a_{ijk}[e_i e_j e_k] + \dots + a_{12\dots n}[e_1 e_2 \dots e_n],$$

они образуют алгебру Грассмана n-мерного векторного пространства. В настоящее время вместо экстенсивных величин Грассмана говорят также о внешних формах, а операцию внешнего умножения обозначают знаком $\wedge$.

Алгебра Грассмана при его жизни не была понята и оценена математиками. Она получила признание в начале XX в. после того, как французский математик А. Пуанкаре (1854–1912), рассматривая подынтегральные выражения как внешние формы, доказал в 1899 г. общую формулу Стокса в многомерном случае, а французский математик Э. Картан (1869–1951) дал в 1899–1902 гг. близкие к современным теории внешних форм и дифференциальных форм, подчеркнув их связь с алгеброй Грассмана.

Кроме умножения экстенсивных величин Грассман определил и «внешнее произведение» отрезков: для двух отрезков – это параллелограмм, для трех отрезков – параллелепипед, а внешнее произведение n отрезков – то, что в настоящее время называется n-мерным параллелепипедом. Он применяет это умножение к определению площади параллелограмма и объема n-мерного параллелепипеда, а также к определению статического момента и условий равновесия сил в механике. О Грассмане: [140, с. 195–204; 51, с. 232–235].

Значительную роль в развитии многомерной геометрии сыграл швейцарский математик **Людвиг Шлефли (1814–1895)**. Он учился и работал в Бернском университете, с 1854 г. – в должности профессора. Разработке n-мерной геометрии посвящена его монография «Теория многократной континуальности», законченная в 1851 г., но напечатанная лишь через 50 лет. Важнейшие ее результаты он опубликовал в ряде работ, которые, впрочем, не получили широкой известности. Шлефли пишет, что его монография «содержит попытку обосновать и выработать новую ветвь анализа, которая, как бы являясь аналитической геометрией n

измерений, содержит таковую для плоскости и пространства в качестве частных случаев для $n = 2,3$». Он называет n-мерную геометрию теорией многократной континуальности. Шлефли, как и Грассман, не распространяет на многомерную геометрию терминов геометрии трехмерного пространства. Точку n-мерного пространства он называет «решением», не связывая это понятие непосредственно с решением какого-либо уравнения или системы, а используя аналогию. Все n-мерное пространство он называет «n-кратной тотальностью» и указывает формулы для расстояний между «решениями» в ортогональной и косоугольной системах координат. То, что мы называем m-мерной поверхностью, Шлефли называет «m-кратным континуумом», а m-мерную плоскость – «m-кратным линейным континуумом». В частности, $(n-1)$-мерную плоскость он записывает в виде $p = ax + by + cz + \ldots + hw$ и называет «полиномом». На случай двух таких плоскостей он распространяет формулу для косинуса угла между двумя плоскостями трехмерной аналитической геометрии. Одномерные континуумы, т. е. линии, он кратко называет «путями».

Для многомерного параллелепипеда Шлефли использует термин «параллелосхема» и находит его объем: «Мера параллелосхемы равна определителю ортогональных проекций ее ребер». Далее он развивает теорию многогранников в n-мерном пространстве, называя их вообще «полисхемами», находит объем многомерной пирамиды и других многогранников. Эйлеру принадлежит теорема о многогранниках: $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$, где α_0 – число вершин, α_1 – число ребер, α_2 – число граней многогранника в трехмерном пространстве, она справедлива для многогранников, поверхность которых гомеоморфна сфере, а все грани гомеоморфны кругу; в частности, она справедлива для выпуклых многогранников. Шлефли обобщает ее на n-мерный случай, а именно получает формулу $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \alpha_k = 1 - (-1)^n$, где α_k – число k-мерных граней n-мерного многогранника (вершин при $k = 0$, ребер при $k = 1$). Уже древние греки знали, что существует пять видов правильных многогранников в трехмерном пространстве – тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр, и притом всего пять, как показа Евклид. Шлефли впервые строит теорию правильных многогранников в n-мерном пространстве. Он показывает, что при $n = 4$ имеется всего шесть видов правильных многогранников, они имеют, соответственно,

5, 8, 16, 24, 120 и 600 трехмерных граней, а при $n \geq 5$ существует всего три вида правильных многогранников (обобщения тетраэдра, куба и октаэдра). В своей книге Шлефли, кроме того, находит объем поверхности n-мерной сферы, вычисляя соответствующий кратный интеграл и интерпретируя его геометрически. Он также указывает, как находить центр и главные оси «квадратичного континуума» – многомерной поверхности второго порядка. Работы Шлефли не сразу получили известность, а его результаты по правильным многогранникам n-мерного пространства были переоткрыты во второй половине XIX в. Стрингхемом, Гоппе и другими математиками.

Дальнейший большой вклад в развитие геометрии n-мерных пространств внес **Бернхард Риман (1826–1866)** в своей публичной лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1854). Здесь он определил весьма общее понятие «n-кратного протяженного многообразия», задав в нем локальную метрику $ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j$ и введя в таком римановом пространстве понятие кривизны. Более подробно мы остановимся на римановых пространствах ниже в очерке о Римане.

Итальянский геометр **Энрико Бетти (1823–1892)** в работе «О пространствах любого числа измерений» (1871), сыгравшей важную роль в становлении топологии, вводит уже современные термины многомерной геометрии. Он рассматривает n действительных переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$, принимающих значения от $-\infty$ до $+\infty$, и пишет: «n-кратно бесконечное поле систем значений этих переменных мы будем называть пространством n измерений и будем обозначать его S_n. Система $(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0)$ будет определять точку L_0 этого пространства, будем называть $z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0$ координатами этой точки. Система m уравнений будет определять поле систем значений $n-m$ независимых переменных, которое будет пространством S_{n-m} стольких же измерений, содержащимся в S_n. Пространство одного единственного измерения… мы будем называть линией».

Французский математик **Камилл Жордан (1838–1922)** в заметке «Очерк геометрии n измерений» (1872), а затем в одноименной статье пишет: «Мы будем рассматривать точку в пространстве n измерений как то, что определяется n координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Линейное уравнение между координатами определяет

плоскость, k совместных линейных уравнений – это k-плоскость, $n-1$ линейное уравнение – прямая; расстояние между двумя точками будет $\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + \ldots}$». Это уже современная терминология с тем отличием, что k-плоскостью он называет то, что мы называем $(n-k)$-плоскостью, или $(n-k)$-мерной плоскостью.

Многомерная геометрия не сразу получила всеобщее признание. Ф. Клейн, опубликовавший в 70-х годах XIX в. ряд работ по многомерной геометрии, пишет, что она получила осуждение «со стороны философов, утверждающих – как того и следовало ожидать, – что n-мерное пространство представляет собой некую бессмыслицу» [140, с. 191]. В работе 1876 г. Клейн показал, что в четырехмерном пространстве любая замкнутая кривая, имеющая узлы, может быть развязана, чего нельзя сделать в трехмерном пространстве. Этот факт был немедленно подхвачен спиритами, одним из них был немецкий астроном и физик Ф. Цёльнер, демонстрировавший «опыт» по завязыванию узлов на шнуре с закрепленными концами, якобы перемещая шнур в четвертое измерение. В три последние десятилетия XIX в. мистический спиритизм, особенно в сочетании с гипнозом, получил широкое распространение. Спириты уверяли, что четвертое измерение является местом обитания духов, и якобы вызывали их оттуда, используя ловкие приемы фокусников, поддельные фотографии и пр.

Среди математиков конца XIX в. не было единства в признании многомерной геометрии и понимания ее будущей важной роли в развитии математики и физики. А. М. Ляпунов (1857–1918) в своей статье «Жизнь и труды П. Л. Чебышева» (1895) писал: «В то время, как почитатели весьма отвлеченных идей Римана все более и более углубляются в функционально-теоретические исследования и псевдогеометрические изыскания в пространствах четырех и более измерений и в этих изысканиях заходят иногда так далеко, что теряется возможность видеть их значение по отношению к каким-либо приложениям не только в настоящем, но и в будущем, – П. Л. Чебышев и его последователи остаются постоянно на реальной почве, руководствуясь взглядом, что только те изыскания имеют цену, которые вызываются приложениями (научными и практическими)». Далее он пишет, что «псевдогеометрические изыскания» «в последнее время нередко ставились в связь с глубокими геометрическими исследованиями Н. И. Лобачевского, с которыми, однако, они ничего не имеют общего. Великий геометр, подобно П. Л. Чебышеву,

оставался всегда на реальной почве и в этих изысканиях трансцедентального характера едва ли мог увидеть развитие своих идей» [51, с. 250]. Следует, однако, заметить, что геометрия не входила в число научных интересов Ляпунова и не была еще создана теория относительности, в которой четырехмерное пространство-время является важнейшим понятием, а риманова геометрия – ее математическим фундаментом. Взгляды А. М. Ляпунова на многомерную геометрию разделял и его ученик В. А. Стеклов (1864–1926), также будущий академик.

Безоговорочное признание многомерной геометрии мы видим у французского математика **Анри Пуанкаре (1854–1912)**, который, в частности, внес основополагающий вклад в создание топологии, а также до А. Эйнштейна разработал важные принципы специальной теории относительности. В начале знаменитого мемуара «Analysis situs» (1895), посвященного основам комбинаторной топологии, Пуанкаре пишет: «Геометрия n измерений занимается исследованием действительности; в этом теперь никто не сомневается. Тела в гиперпространстве поддаются точным определениям, подобно телам из обычного пространства, и если мы не можем их изобразить, то можем себе представить и изучать.

Действительно, геометрия не имеет своей единственной целью непосредственное описание тел, воспринимаемых нашими органами чувств: прежде всего она является аналитическим исследованием некоторой группы, и, следовательно, ничто не препятствует изучению иных групп, аналогичных и более общих… Новый язык более точен; кроме того, аналогия с обычной геометрией может создать ассоциации плодотворных идей и подсказать полезные обобщения» [51, с. 242].

Итальянский математик **Джузеппе Пеано (1858–1932)** в 1888 г. на основе «Учения о протяжении» Грассмана дал аксиоматику n-мерного линейного пространства. Немецкий математик **Давид Гильберт (1862–1943)** в книге «Основания геометрии» (1899) привел свою аксиоматику трехмерного евклидова пространства. Немецкий математик и физик **Герман Вейль (1885–1955)** в книге «Пространство, время, материя» (1918) привел аксиоматику n-мерного евклидова пространства, присоединив к аксиомам Пеано n-мерного линейного пространства аксиомы о связи между векторами и точками и аксиомы скалярного произведения. В его аксиоматике неопределяемыми понятиями являются «точка» и «вектор». В конце XIX в. появилось

понятие «функциональное пространство» как обобщение n-мерного пространства на бесконечномерный случай.

История возникновения многомерной геометрии подробно рассмотрена в книге Б. А. Розенфельда [51, гл. 4, 7, 8], использованной в нашем очерке.

Риман

Гениальный немецкий математик **Георг Фридрих Бернхард Риман (1826–1866)** прожил неполных 40 лет. Его творческая деятельность, оригинальная и плодотворная, продолжалась менее пятнадцати лет, но оказала большое влияние на развитие многих областей математики. Он родился в селе Брезеленце (королевство Ганновер, Нижняя Саксония) в семье лютеранского пастора вторым из шести детей. Уже в гимназии в г. Люнебург Бернхард проявил свои блестящие математические способности, прочтя самостоятельно книгу Лежандра «Теория чисел» (объемом около 600 страниц) и некоторые работы Эйлера. Одним из научных направлений Бернхарда Римана в дальнейшем стала теория чисел.

В течение двух лет (1846–1847) Риман учился в Гёттингенском университете, сначала (по настоянию отца) на факультете теологии, но вскоре, испытывая большой интерес к математике, переходит на философский факультет. **Мориц Штерн (1807–1894)**, читавший там лекции по численному решению уравнений и определенным интегралам, обратил внимание на выдающиеся математические способности Бернхарда Римана. В то время К. Ф. Гаусс уже лет 10 не занимался математикой и читал там лишь небольшой курс о методе наименьших квадратов, но Риман, как полагают, не имел тогда с Гауссом личных контактов. Риман самостоятельно изучал труды Гаусса и испытал в некоторых своих работах влияние его идей.

Особенностью немецких университетов была свобода, с которой студенты могли переходить из одного университета в другой. В 1847–1849 гг. Риман учился в Берлинском университете, где слушал лекции Дирихле, Якоби, Штейнера и Эйзенштейна. Эти два года были особенно важными для математического образования Римана. Кроме Гаусса, в Гёттингене тогда не было крупных математиков.

В 1849 г. Риман возвращается в Гёттингенский университет и продолжает учебу в течение трех семестров. Здесь его особенно интересуют лекции по физике **Вильгельма Вебера (1804–1891)**, с ним Риман подружился. Вебер – автор трудов по электродинамике, друг и помощник Гаусса. Вместе с Гауссом Вебер изобрел электромагнитный способ телеграфии и сам построил первый в Германии электротелеграф. В 1850 г. начал работать физико-математический семинар под руководством Вебера, Листинга, Штерна и др. Риман принимает в нем участие в качестве ассистента Вебера. Это определило его интерес также к занятиям физикой.

В 1848 г. немецкий математик **Иоганн Бенедикт Листинг (1808–1882)**, ученик Гаусса, опубликовал книгу «Предварительные сведения по топологии», где приводит определение этой науки, сам термин «топология» и некоторые свойства заузленных кривых. Но не Листингу, а Риману суждено было вскоре стать «отцом топологии».

Докторская диссертация Бернхарда Римана «Основы общей теории функций одного комплексного переменного» была защищена им в Гёттингенском университете в 1851 г. и в том же году напечатана. Она явилась новым этапом в развитии теории аналитических функций и топологии поверхностей. Гаусс написал хвалебный отзыв о диссертации Римана, отметив большую самостоятельность автора и то, что диссертация намного превосходит требования, предъявляемые к докторским диссертациям.

Материальное положение Римана еще не скоро улучшилось. В 1854 г. он получил звание приват-доцента с правом чтения лекций после представления, как это полагалось, своей второй диссертации («хабилитационной») «О возможности представления функций посредством тригонометрических рядов» и работы (пробной лекции) «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». «Хабилитационная» диссертация Римана посвящена рядам Фурье. Там, в частности, вводится интеграл Римана для функций действительного переменного. Пробная лекция посвящена определению так называемой римановой геометрии n измерений – одной из важнейших составных частей современной математики. Из слушателей этой лекции только Гаусс мог в полной мере оценить глубину идей Римана в геометрии. Выдающийся немецкий математик **Рихард Дедекинд (1831–1916)**, работавший в Гёттингенском университете в 1854–1858 гг., друг и первый биограф Римана пишет: «Лекция превзошла все его [Гаусса] ожидания, привела его в чрезвычайное

удивление; возвращаясь с факультетского заседания, он говорил Вильгельму Веберу с величайшими похвалами и редким у него возбуждением о глубине мыслей, изложенных Риманом» [129, с. 29]. Вторая диссертация и пробная лекция Римана были опубликованы Дедекиндом в 1868 г., уже после смерти Римана. Трудами ряда выдающихся математиков конца XIX в. и в XX в. риманова геометрия превратилась в самостоятельную науку и стала математической основой общей теории относительности. В 1854 г. Риман начал читать свои лекции по уравнениям в частных производных. Он сообщает отцу, что его лекции слушают 8 студентов. Через год его лекции по функциям комплексной переменной (в частности, по эллиптическим и абелевым функциям) слушают 3 студента. Одним из них был Р. Дедекинд.

Большую роль в жизни Римана сыграл выдающийся немецкий математик, его друг **П. Л. Дирихле (1805–1859)**, занявший в 1855 г. после смерти Гаусса кафедру математики в Гёттингенском университете. Университетское начальство довольно прохладно воспринимало успехи Римана. Дирихле с большим трудом удалось добиться небольшой оплачиваемой должности для Римана на кафедре. В 1857 г. выходит работа Римана «Теория абелевых функций» и работа по теории гипергеометрических функций. В 1857 г. Бернхард Риман стал экстраординарным профессором Гёттингенского университета, а после смерти Дирихле в 1859 г. – ординарным профессором на кафедре математики, которую занимал Дирихле в этом университете. В 1859 г. Берлинская АН избрала Римана членом-корреспондентом. В этом же году вышла работа Римана «О числе простых чисел, не превышающих данной величины», которая открыла новый этап в развитии аналитической теории чисел в связи с тем, что Риман распространил ζ-функцию на комплексную плоскость, указал ряд ее свойств и выдвинул свою знаменитую гипотезу о ее нулях. Ниже мы будем подробнее рассматривать содержание математических работ Римана. После смерти Дирихле усилилось влияние Вебера, и Риман занимается задачами математической физики.

В 1862 г. Риман женился. Родилась дочь. Осенью того же года он серьезно простудился, и у него обнаружился туберкулез легких. Риман прекратил чтение лекций и большую часть времени в последние четыре года жизни проводил на лечении в Италии. В 1866 г., т. е. в последний год жизни Римана, его научные успехи получили признание: Берлинская АН избрала его своим членом, Парижская –

иностранным членом, а за месяц до смерти он стал и членом Лондонского королевского общества. Риман умер и похоронен в Италии.

В 1876 г. вышло полное собрание сочинений Бернхарда Римана. Были опубликованы также три тома его лекций: «Дифференциальные уравнения с частными производными математической физики» (1869), «Тяготение, электричество, магнетизм» (1875), «Эллиптические функции» (1899), а в 1902 г. еще и записи его лекций, сделанные его учениками. Имя Римана носят очень многие его достижения и объекты в математике [197, т. 4, с. 987–1033]. Его именем назван кратер краевой зоны Луны.

Ф. Клейн пишет: «Риман был человеком блестящей интуиции. Своей всеобъемлющей гениальностью он превосходил всех своих современников» [140, с. 273]. У Римана немного математических работ, но каждая из них содержит оригинальные идеи и результаты. Кратко рассмотрим основные достижения Римана в математике.

Бернхард Риман является одним из главных творцов теории функций комплексного переменного и топологии, которые стали оформляться в XIX в. как науки. В докторской диссертации «Основы общей теории функций одной комплексной переменной» (1851) он излагает свой подход к построению теории аналитических функций. В отличие от принятой тогда традиции представлять функцию $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ переменной $z = x + iy$ формулой (в частности степенным рядом), Риман предполагает, что в области ее определения функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(условия Коши-Римана, они встречаются у Коши, а еще раньше – у Д'Аламбера и Эйлера, см. наше пособие [234], с. 143–144). В настоящее время они называются условиями аналитичности функции $f(z)$. Таким образом, Риман рассматривает аналитические функции $f(z)$ комплексного переменного z. Риман устанавливает свойство конформности таких отображений, отмечая, что конформные отображения рассматривал уже Гаусс. Из приведенной выше системы уравнений Риман получает:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Это означает, что функции u и v удовлетворяют уравнению Лапласа (являются гармоническими).

Бесконечно удаленную точку ∞ комплексной плоскости Риман рассматривает как равноправную с остальными точками комплексной плоскости, отмечая, что при стереографической проекции точка ∞ переходит в точку сферы, противоположную точке касания сферы с комплексной плоскостью. Сферу как образ комплексной плоскости при стереографической проекции нередко называют «римановой сферой».

Для n-значной функции $f(z)$ комплексной переменной z Риман предложил рассматривать область определения не в комплексной плоскости переменной z, а на некоторой поверхности, на которой функций $f(z)$ является однозначной. Такие поверхности вскоре стали называть римановыми. Риманова поверхность n-значной функции состоит из n плоскостей («листов»), «разостланных» над комплексной плоскостью z, разрезанных соответствующим образом и склеенных по линиям разреза. (Склеивание нужно для того, чтобы точки поверхности, лежащие на разных листах, можно было соединять непрерывной кривой.) Если числу z комплексной плоскости отвечает n значений w_i функции $f(z)$, то каждому значению w_i отвечает только одна точка z_i римановой поверхности, расположенная (над точкой z комплексной плоскости) на соответствующем листе поверхности, и обратно. Поясним это на простейшем примере.

Функция $w=\sqrt{z}$ является двузначной, для нее

$$w_0=\sqrt{|z|}e^{\frac{\varphi i}{2}}, \qquad w_1=\sqrt{|z|}e^{\frac{1}{2}(\varphi+2\pi)i}=-w_0, \qquad \varphi=\arg z.$$

Ее риманова поверхность состоит из двух листов, разрезанных вдоль положительной действительной полуоси комплексной плоскости и склеенных по линии разреза (рис. 1). Берега разреза на листе называются верхним и нижним, на рисунке они помечены знаками + и –. Считается, что при склеивании листов нижний берег одного листа соединяется с верхним берегом другого, и наоборот.

Для функции $w=\sqrt{z}$ точка $z=0$ является точкой ветвления. На римановой поверхности ей отвечает точка O. На комплексной плоскости значения z_i,

отвечающие $w_i (i = 0,1)$ изображаются одной точкой z, а на римановой поверхности они лежат на разных листах.

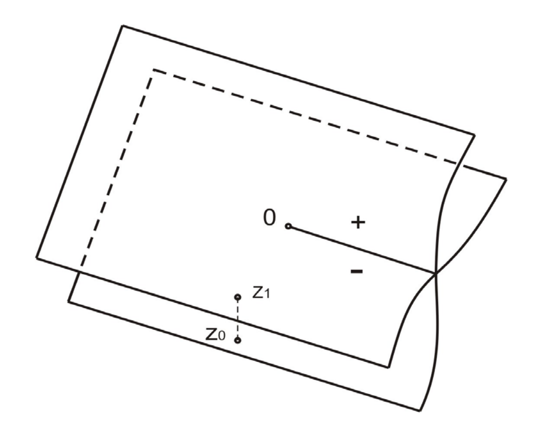


Рис. 1

От точки z_0 поверхности здесь можно перейти к точке z_1 на другом листе, обходя один раз точку ветвления O ($z = 0$) по лежащей на поверхности непрерывной кривой, которая при пересечении с линией склеивания листов переходит с одного листа на другой.

Отметим, что замечательная идея введения римановых поверхностей встретила в XIX в. поддержку не всех математиков, занимавшихся теорией аналитических функций. Так, французские математики Брио и Буке почти четверть века спустя в своей монографии «Теория эллиптических функций» (1875) пишут, что не видят особого преимущества введения римановых поверхностей перед той точкой зрения, согласно которой переход от одного значения w_i многозначной функции к другому достаточно объяснять обходом вокруг точки ветвления, который совершает нужное число раз точка z в комплексной плоскости. Тем не менее, римановы поверхности были восприняты некоторыми математиками XIX в. и, в основном благодаря работе Ф. Клейна 1882 г., получили топологическую интерпретацию в виде сфер без ручек или с ручками, которая способствовала развитию топологии. В приведенном выше примере это делается следующим образом. Каждый из двух листов римановой поверхности (рис. 1) с помощью стереографической проекции превращается в сферу, разрезанную по меридиану. Разрезы этих сфер растягиваем так, что эти сферы превращаются в полусферы, а затем эти полусферы склеиваем вместе таким образом, чтобы соединялись образы разноименных берегов разреза листов. Следовательно, риманова поверхность функции $w = \sqrt{z}$ топологически эквивалентна сфере.

Для функции $w=\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}$, где a_i – различные, риманова поверхность состоит из двух листов, склеенных по разрезах между точками, отвечающими a_1, a_2, и точками, отвечающими a_3, ∞. Стереографическая проекция превращает один из листов в сферу с двумя разрезами. Таким же образом другой лист переходит в аналогичную сферу. Вытягиваем края разрезов каждой из этих сфер в трубки и склеиваем трубки, исходящие из одной сферы с соответствующими трубками, исходящими из другой. В итоге получаются две сферы, соединенные двумя трубками. Эта поверхность топологически эквивалентна тору, или сфере с одной ручкой. Риман не интерпретировал свои поверхности как сферы с ручками, а только отдельные листы поверхности представлял себе и в виде сферы с соответствующими разрезами.

В §6 докторской диссертации Риман впервые рассматривает относящийся к топологии вопрос о связности поверхностей. Поверхность предполагается незамкнутой. Под связностью поверхности Риман предполагает линейную связность, а именно: поверхность называется связной, если любые ее две точки можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей поверхности. Связность поверхности он исследует с помощью системы ее разрезов, т. е. непрерывных кривых на поверхности, не имеющих точек самопересечений и связывающих две точки границы поверхности. Связную поверхность он называет односвязной, если любой разрез разбивает ее на куски, т. е. на отдельно расположенные части. Риман дает здесь первое, малоудобное определение порядка связности поверхности – некоторого числа, инвариантного относительно систем разрезов поверхности. Позже в «Теории абелевых функций» (1857) он продолжил изучение связности поверхностей. Введением своих поверхностей и исследованием их связности Риман положил начало геометрическому направлению в теории аналитических функций и становлению топологии как науки.

После введения своих поверхностей и рассмотрения вопроса об их связности Риман решает главную задачу своей докторской диссертации, посвященной оригинальному методу построения теории аналитических функций. Выше говорилось, что Риман определил аналитическую функцию $f(z)=u+iv$ тем, что ее действительная и мнимая части удовлетворяют условиям Коши–Римана. При этом он показал, что u и v удовлетворяют уравнению Лапласа. Теперь Риману достаточно

было бы доказать существование решения уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ при заданном условии на функцию u на границе римановой поверхности T. Но Риман не решает прямо эту так называемую задачу Дирихле (ее решили вскоре Г. А. Шварц и К. Нейман), а использует в §16–18 диссертации для своей цели вариационный «принцип Дирихле» [289, с. 197]. Однако, как указал Вейерштрасс, в доказательстве Римана был существенный пробел: не было доказано, что принцип Дирихле дает решение требуемой гладкости [140, с. 291–292]. Ф. Клейн пишет: «Математики в большинстве своем отвернулись от Римана и перестали доверять его теоремам существования…» [140, с. 292]. Но Риман, хотя и признал критику справедливой, был уверен, что его теорема существования верна. Ее доказал иным способом ученик Вейерштрасса Г. А. Шварц в 1870 г., решив краевую задачу для двумерного уравнения Лапласа с помощью интеграла Пуассона сначала для круга, а затем продолжил решение. А в 1901 г. Д. Гильберт обосновал принцип Дирихле [140, с. 292–295]. Отметим еще, что в §21 докторской диссертации Риман доказал свою знаменитую теорему о существовании конформного отображения одной односвязной плоской области на другую. В XIX в. вместо термина «конформное отображение» (от лат. *conformis* – подобный) говорили о «подобии в бесконечно малом».

Продолжением докторской диссертации Римана является его «Теория абелевых функций» (1857). Алгебраической называется функция $w=f(z)$, удовлетворяющая уравнению $F(z,w)=0$, где F – неприводимый многочлен от z, w (с коэффициентами из некоторого поля K). Часто уравнение $F(z,w)=0$ записывают в виде $a_0(z)w^n+a_1(z)w^{n-1}+\ldots+a_n(z)=0$, где $a_i(z)$ – многочлены, $a_0(z)\neq 0$. Термин «абелева функция» в настоящее время имеет иной смысл, а Риман изучает на своих поверхностях алгебраические функции и интегралы от них, а также абелевы интегралы. Абелевым интегралом называется интеграл вида $\int_{z_1}^{z_2} R(z,w)dz$, где $R(z,w)$ – рациональная функция от переменных z и w, связанных алгебраическим уравнением $F(z,w)=0$, где многочлен $F(z,w)$ определен выше.

Риман начинает и эту работу с топологическим соображений. Вспомнив термин Лейбница «*analysis situs*» (анализ положения), он предлагает использовать этот термин при изучении не числовых соотношений, а лишь «пространственных

соотношений взаимного расположения». Этот термин использовали еще лет 50 после Римана, пока не вошел в употребление термин «топология», предложенный Листингом в 1848 г. Риман вновь, уже по-иному определяет порядок связности поверхности. Для наглядности приводит рисунки односвязной, двусвязной и трехсвязной незамкнутых поверхностей. В §3 он отмечает, что для превращения замкнутой многосвязной поверхности в односвязную требуется четное число разрезов и обозначает это число через $2p$. (Замкнутая поверхность не имеет границы, а p – это число разрезов такой поверхности замкнутыми кривыми, каждый такой кольцевой разрез можно считать состоящим из двух обычных – от точки к точке.) Позже А. Клебш в 1865 г. назвал число p родом замкнутой двумерной алгебраической поверхности (в настоящее время его обычно обозначают буквой g). Род поверхности является ее инвариантом, т. е. не меняется при топологических (взаимно однозначных и взаимно непрерывных) преобразованиях. Для односвязной поверхности, например сферы, род $p=0$. Тор имеет одну дырку, его род $p=1$, обобщенный тор, или сфера с p ручками имеет род, равный p. Клебш ввел также и понятие рода плоской алгебраической кривой. С родом кривой в специальных случаях имел дело уже Абель [289, с. 105].

Для n-листной римановой поверхности с четным числом ω простых точек ветвления Риман получает формулу:

$$p=\frac{\omega}{2}-n+1.$$

Например, для римановой поверхности функции $w=\sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}$, где a_i – различные, отсюда получаем, что $p=\frac{4}{2}-2+1=1$, т. е. эта поверхность топологически эквивалентна тору.

В работе «Теория абелевых функций» (1857) Риман дает свое построение теории аналитических функций. Опираясь на принцип Дирихле, он доказывает существование функций, имеющих заданные особенности на произвольной замкнутой римановой поверхности T данного рода p. Затем он строит общую теорию алгебраических функций, интегралов от них, а также абелевых интегралов на поверхности любого рода p. (Риман называет абелевы интегралы абелевыми функциями.) До Римана алгебраические функции изучал, хотя и не полно,

французский математик Виктор Пюизё (1820–1883) в двух работах 1851–1852 гг., доказавший возможность разложения таких функций по дробным степеням $z-a$ в окрестности точки ветвления a. Риман классифицирует абелевы интегралы на три рода: I) не имеющие на поверхности T особых точек; II) имеющие только полюсы; III) имеющие также и логарифмические особенности. Он показывает, что число линейно независимых интегралов первого рода на поверхности равно роду p поверхности. Заметим, что Абель для своих интегралов ограничивается только гиперэллиптическим случаем.

Во второй части рассматриваемой работы Риман вводит и изучает θ-функцию $\theta(v_1,\ldots,v_p)$ общего вида от p комплексных переменных, определяемую p-кратным рядом. Он указывает условие сходимости этого ряда, а доказательство сходимости приводит на лекциях. При изучении θ-функции он дает полное решение проблемы Якоби обращения абелевых интегралов.

В 1859 г. Риман совершил поездку в Берлин, где его тепло приняли Куммер, Вейерштрасс и Кронекер. Вейерштрасс сказал ему, что было бы важным обобщить на n-мерный случай известную теорему Якоби о том, что однозначная аналитическая функция на комплексной плоскости не может иметь более двух периодов. Позже в письме к Вейерштрассу Риман привел свое доказательство теоремы: однозначная аналитическая функция n комплексных переменных не может иметь более $2n$ периодов.

К теории функций комплексного переменного относятся также лекции Римана «Эллиптические функции», изданные Сталем в 1899 г.

После Гаусса Риман делает первые шаги к рассмотрению автоморфных функций, до того как эти функции были обстоятельно изучены в XIX в. Ф. Клейном и А. Пуанкаре. А именно: Риман в лекциях 1858–1859 гг. о гипергеометрических рядах пришел к модулярной функции (частный случай автоморфных функций), рассматривая в комплексной области вопрос об обращении функции $y=\dfrac{y_1(z)}{y_2(z)}$, где y_1 и y_2 – частные интегралы дифференциального уравнения, определяющего гипергеометрическую функцию. (Это уравнение см. в [289, с. 35], а определения модулярной и автоморфной функции – в [289, с. 43] и ниже на с. 116.) Задача обращения здесь заключается в том, чтобы из приведенного выше равенства для y

выразить z в виде $z = f(y)$. При этом Риман пользуется конформными отображениями вида $z_1 = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$. Эти его лекции вскоре получили широкую известность.

Отметим, что у Римана теория функций комплексного переменного (теория аналитических функций) формируется уже не как ветвь анализа, а приобретает черты самостоятельной науки.

Римана считают одним из основателей аналитической теории дифференциальных уравнений благодаря оригинальной и трудной задаче, которая была им поставлена и частично исследована, а вскоре получила название «проблема Римана». Он начал заниматься ею в работе «Новые результаты из теории функций, представимых гауссовым рядом $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$» (1857). Здесь имеется в виду гипергеометрический ряд [289, с. 35], но Риман считает x комплексным.

В этой работе листы римановой поверхности он называет ветвями функции и дает определение точки ветвления (особой точки) функции как точки, при обходе которой совершается переход с одной ветви на другую. Целью работы является обобщение гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. Оригинальность метода Римана здесь состоит в том, что он исходит не от более общего линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка или более общего ряда, а в качестве обобщения вводит свою P-функцию, которую записывает в виде

$$w = P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}.$$

Здесь a, b, c – особые точки (точки ветвления) этой функции и 6 параметров, попарно связанных с особыми точками. Риман требует, чтобы любые три ветви w_i P-функции были линейно зависимы, а также еще одно условие, которое мы не приводим. Он указывает многочисленные свойства P-функции и приходит к выводу, что она удовлетворяет некоторому линейному однородному дифференциальному уравнению 2-го порядка с рациональными коэффициентами, но не находит его в окончательном виде. Это уравнение получил Папперитц в 1885 г. [156, с. 262–264; 197, т. 4, с. 189–190]. В одном рукописном фрагменте 1857 г. «Две общие теоремы о

линейных дифференциальных уравнениях с алгебраическими коэффициентами» он рассматривает и более сложные случаи.

Проблема Римана заключается в построении дифференциального уравнения с рациональными (или алгебраическими) коэффициентами

$$w^{(n)} + P_1(z)w^{(n-1)} + \ldots + P_n(z)w = 0 \qquad (z = x + iy),$$

когда в качестве решений берут n линейно независимых функций $w_1,\ldots,w_n$, при этом предполагается, что каждая из них имеет особые точки (полюсы) $a_1,\ldots,a_m$ (у Римана – в других обозначениях). Каждая из функций $w_1,\ldots,w_n$ многозначна – принимает s значений в каждой из точек $z \neq a_j (j = 1,\ldots,m)$, т. е. римановы поверхности функций состоят из s листов.

Система функций $w_1,\ldots,w_n$ здесь такова, что каждая из них при однократном обходе точки z вокруг особой точки a_j выражается в виде линейной комбинации функций $w_1,\ldots,w_n$, т. е.

$$w_i = \sum_{k=1}^{n} A_k^{i,j} w_k \qquad (i = 1,\ldots,n;\, j = 1,\ldots,m).$$

Совокупность таких линейных преобразований получила название группы монодромии (от греч. $\mu o \nu o \varsigma$ – один, $\delta \rho o \mu o \varsigma$ – путь). Риман исследовал некоторые свойства этой группы, в частности при $n = 2$, $m = 3$ для гипергеометрических функций, но найти искомое дифференциальное уравнение ему не удалось. А главное то, что ему не удалось доказать в общем случае существование системы функций $w_1,\ldots,w_n$, которые вели бы себя так, как это требуется в его работе. Оригинальность Римана проявилась здесь в том, что вопреки существовавшей до него традиции, он исходил не от дифференциального уравнения с особыми точками к исследованию свойств решений, а наоборот.

С начала 80-х XIX в. появилось много работ, посвященных проблеме Римана, ряд математиков (А. Пуанкаре, Ф. Клейн, Л. Шлезингер) существенно продвинулись в ее решении. Выдающийся немецкий математик **Давид Гильберт (1866–1943)** в 1900 г. на II Международном математическом конгрессе в Париже поставил 23 важные проблемы, требующие решения. Из них проблема Римана была 21-й. Гильберт и решил ее в 1904 г., используя некоторые результаты теории интегральных уравнений, которую он создал. В 1906 г. югославский математик И. Племель (1873–

1967), работавший до 1957 г. в Черновицком университете, дал более простое доказательство проблемы Римана. Иными средствами ее решали и позже.

В 1865–1875 гг. немецкий математик **Иммануэль Лазарус Фукс (1833–1902)**, ученик Вейерштрасса, не зная о результатах Римана, создал теорию линейных дифференциальных уравнений n-го порядка в комплексной области, получивших позже название уравнений класса Фукса. Фукс исходит из указанного выше линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка, предполагая, что его коэффициенты имеют вид

$$P_k(z) = \prod_{j=1}^{m} (z - a_j)^{-k} q_k(z),$$

где $a_1, \ldots, a_m$ – различные регулярные особые точки, а $q_k(z)$ – многочлены степени $\leq \frac{k}{m-1}$. Он исследует, как изменяются решения (интегралы) уравнения в результате обхода точки z вокруг особых точек.

Обстоятельному изложению истории развития аналитической теории дифференциальных уравнений посвящена монография **В. А. Добровольского** [156], к которой мы отсылаем читателей, желающих подробнее ознакомиться с этими вопросами.

Кратко рассмотрим достижения Римана, относящихся к математическому анализу в действительной области. Прежде всего это введение понятия определенного интеграла от функций одного переменного. Это понятие интеграла носит его имя. Он ввел это понятие в «хабилитационной» диссертации «О возможности представления функций посредством тригонометрического ряда», представленной им в 1853 г. и опубликованной в 1867 г., уже после его смерти. В [289, с. 79] говорилось, что после введения класса непрерывных функций возникла потребность пересмотра понятия определенного интеграла с целью доказать возможность интегрирования любой непрерывной функции. Это сделал Коши в «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (1823). Коши вводит определенный интеграл от непрерывной на отрезке функции $f(x)$ как предел интегральной суммы, выбирая значения функции в левых концах промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения [289, с. 79]. Показав существование такого интеграла, Коши отмечает, что оно сохраняется и дает то же значение интеграла от непрерывной

функции, если брать ее значения в интегральной сумме в произвольных точках отрезков разбиения. Обеспечивалась и законность интегрирования кусочно-непрерывных функций, но оставался открытым вопрос, можно ли интегрировать функции, определенные на отрезке и имеющие на нем бесконечное число точек разрыва. Актуальность расширения понятия определенного интеграла вызывалась, в частности, тем, что коэффициенты и частичная сумма ряда Фурье выражаются через интегралы.

Решающий шаг в расширении понятия определенного интеграла был сделан Бернхардом Риманом. В указанной выше его работе первые несколько параграфов посвящены истории вопроса о рядах Фурье, начиная с работы Д. Бернулли, опубликованной в 1755 г., и кончая работой Дирихле 1829 г. Прежде чем перейти к изложению своих результатов по рядам Фурье, Риман вводит определенный интеграл для функций, определенных на отрезке $[a,b]$, не только для непрерывных. В интегральной сумме, которая была и у Коши, Риман берет значения функции $f(x)$ в произвольных точках отрезков $[x_{i-1},x_i]$ разбиения Π, а предел этой суммы при $d(\Pi)\to 0$, если он конечный, называет определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Определение интеграла Римана отличается от определения Коши лишь тем, что отсутствует требование непрерывности функции. Это определение приводится во всех учебниках математического анализа, отличаясь разве лишь некоторыми обозначениями. Очень важным является то, что Риман здесь приводит носящий его имя критерий (необходимое и достаточное условие) существования определенного интеграла, а именно: для интегрируемости ограниченной на $[a,b]$ функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)(x_i-x_{i-1})\to 0$ при $d(\Pi)\to 0$. Мы несколько модернизируем обозначения Римана, здесь

$$\omega_i(f)=M_i-m_i,\quad M_i=\sup_{[x_{i-1},x_i]}f(x),\quad m_i=\inf_{[x_{i-1},x_i]}f(x),$$

число $\omega_i(f)$ называется колебанием функции $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1},x_i]$ разбиения Π, а $d(\Pi)$ – диаметром разбиения Π.

Риман не доказывает своего критерия, считая его равносильным определению интеграла от функции $f(x)$, ограниченной на отрезке $[a,b]$. Он только доказывает, что условие его критерия равносильно иному условию: для любого $\alpha>0$ сумма длин

тех отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения, на которых колебания $\omega_i(f) > \alpha$, является сколь угодно малой при достаточно малых $d(\Pi)$ [258, с. 237–238]. Это иное условие нередко бывает более удобным для применения как, например, в указанном ниже примере Римана. Рассуждения Римана являются не вполне строгими: колебание $\omega_i(f)$ функции на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ он понимает как разность наибольшего и наименьшего значений функции на $[x_{i-1}, x_i]$, но для разрывной функции они могут не существовать. Верхних и нижних сумм в явном виде он здесь не вводит, они есть у него в лекциях по математической физике, опубликованных в 1868 г., но только для интегралов от непрерывных функций. Там же он обратил внимание и на свойство монотонности этих сумм. У Дарбу и некоторых других математиков эти суммы уже для любых ограниченных функций появились в 1875 г., поскольку с начала 70-х гг. XIX в. стали известными понятия точных граней, приведенные в лекциях Вейерштрасса.

В рассматриваемой работе о рядах Фурье Риман приводит свой интересный пример интегрируемой функции со сложным множеством точек разрыва:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2},$$

где символ (x) означает разность между x и ближайшим к нему целым числом, а в случае, когда x расположено посредине между целыми числами, то (x) принимается равным нулю. Разрывы этой функции – скачки в рациональных точках x, которые, будучи представлены в виде несократимых дробей, имеют четные знаменатели. Эта функция на каждом отрезке $[a,b]$ имеет счетное число точек разрыва. Она интегрируема на $[a,b]$, так как удовлетворяет критерию Римана в формулировке со вторым условием. Об этой функции см. [80, с. 18–19] или [258, с. 238–239].

Риману принадлежит также следующий пример функции на отрезке $[0,1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{если } x=p/q, \text{ где } p \text{ и } q \text{ целые, взаимно простые,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Эта функция ограничена, непрерывна в каждой иррациональной точке и разрывна в каждой рациональной. Она интегрируема по Риману, интеграл равен нулю. Функция Дирихле, равная единице при каждом рациональном x и нулю при каждом иррациональном, не интегрируема по Риману ни на каком отрезке $[a,b]$.

Риман не выясняет условий, обеспечивающих возможность разложения функции в ряд Фурье. Для тригонометрических рядов общего вида Риман приводит свой метод суммирования, используя свою обобщенную вторую производную. Предполагая, что функция уже разложена в ряд Фурье, он исследует свойства такого ряда. Риман доказывает так называемый принцип локализации: сходимость ряда Фурье в точке x_0 зависит только от поведения функции $f(x)$ в сколь угодно малой окрестности этой точки. До Римана об этом свойстве знали многие математики, начиная с Фурье. Риман показывает, что если функция $f(x)$ интегрируема, то коэффициенты a_n, b_n ее ряда Фурье стремятся к нулю при $n \to \infty$. В области числовых рядов Риману принадлежит теорема о перестановке членов условно (т. е. не абсолютно) сходящегося ряда.

После Римана в последние три десятилетия XIX в. появилось очень много работ по теории определенного интеграла. Мы укажем только некоторые факты, касающиеся условий интегрируемости по Риману (R-интегрируемости), а подробно история развития понятия интеграла изложена в монографиях Ф. А. Медведева [79] и И. Н. Песина [80]. Здесь и ниже мы говорим об интегрировании ограниченных на отрезке $[a,b]$ функций, т. е. в собственном смысле.

В XIX в. предпринимались попытки выяснить вид множеств точек разрыва, с которыми функции были бы R-интегрируемы. Это вело к развитию теории множеств и введению понятия их меры. Уже Риман наметил путь к понятию меры точечных множеств, так как в его критерии (во второй формулировке) говорится о промежутках сколь угодно малой суммарной длины, покрывающих некоторые точки. История развития теории множеств в XIX в. изложена в монографии Ф. А. Медведева [144], мы укажем только на некоторые факты из теории множеств, связанные с вопросом об R-интегрируемости функций.

В 1870 г. немецкий математик Г. Ганкель пришел к понятиям всюду плотного и нигде не плотного множеств на отрезке (в другой терминологии и без понятия предельной точки и замыкания множества). К этим же понятиям в 1875 г. пришел и немецкий математик П. Дюбуа-Реймон, который определяет всюду плотное множество на интервале как состоящее из точек таких, что «во всяком сколь угодно малом отрезке имеются таковые точки, подобно тому, как это имеет место для рациональных точек». А нигде не плотное множество, по его словам, состоит из точек

таких, что «во всякой сколь угодно малой части интервала можно задать конечный отрезок, в котором не лежит ни одной такой точки» [144, с. 91]. Ганкель в своей работе приходит к неверному утверждению: всякая ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция, множество точек разрыва которой нигде не плотно на $[a,b]$, интегрируема на $[a,b]$.

Выдающийся английский математик, профессор Оксфордского университета **Генри Смит (1826–1883)**, являющийся одним из основателей теории множеств, в статье «Об интегрировании разрывных функций» (1875), в частности, строит интересные примеры нигде не плотных бесконечных множеств на промежутках числовой оси. Он рассматривает множество $E_1 = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$, (в других обозначениях), где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Единственной предельной точкой множества E_1 является число O (предельную точку тогда называли точкой сгущения). Каждая точка множества E_1 является предельной точкой множества $E_2 = \left\{ \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}, \text{ где } n_1, n_2 \in \mathbb{N} \right\}$ (это видно, если зафиксировать какое-нибудь число $\frac{1}{n}$). Для множества $E_k = \left\{ \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_k}, \text{ где } n_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \ldots, k \right\}$ предельными являются все точки множества E_{k-1}, и т. д. Говорят также, что множество E_{k-1} является производным для множества E_k. Смит доказывает, что все эти множества нигде не плотны на содержащих их промежутках, а если функция $f(x)$ ограничена на $[a,b]$ и E_k – множество ее точек разрыва первого рода на отрезке $[a,b]$, то она R-интегрируема на $[a,b]$. При доказательстве Смит покрывает множество E_k системой интервалов, имеющих произвольно малую суммарную длину, т. е. доказывает, что оно имеет меру нуль.

Приведем следующий пример Смита в несколько подправленном виде. Возьмем отрезок $[0,1]$ и натуральное число $m > 2$. Делим отрезок $[0,1]$ на m равных частей и выбрасываем из них предпоследнюю в виде интервала. (Смит выбрасывает последнюю из них, но мы выбрасываем, не нарушая общности, предпоследнюю часть, чтобы устранить неопределенность в отношении концов выбрасываемой части и получить в частном случае канторовское совершенное множество.) На втором шаге

каждый из оставшихся $m-1$ отрезков делим на m равных частей и выбрасываем из них предпоследнюю на каждом из отрезков. Этот процесс продолжаем до бесконечности. В итоге получается множество, нигде не плотное на отрезке $[0,1]$ и имеющее меру нуль. При $m=3$ это известное множество немецкого математика Г. Кантора, который построил его на 8 лет позже. Для получения множества с положительной мерой, нигде не плотного на отрезке $[0,1]$, Смит действует сходным образом: на первом шаге делит отрезок $[0,1]$ на m равных частей, но на втором шаге – на m^2 частей, на третьем – на m^3 частей, и т. д., с такой же процедурой выбрасывания частей. Он не вводит понятия меры числовых множеств на прямой, а просто вычисляет предел суммарной длины частей, остающихся при выбрасывании остальных. Смит построил этот пример для того, чтобы доказать ошибочность приведенного выше утверждения Ганкеля. Таким образом, если функция $f(x)$ ограничена на $[0,1]$ и множество ее точек разрыва первого рода является множеством Смита нулевой меры, то она R-интегрируема на $[0,1]$, а если положительной меры, то нет [144, с. 99–101]. Изучение функций со сложными множествами точек разрыва явилось одной из причин возникновения теории множеств. Отметим, что немецкий математик **Георг Кантор (1845–1918)** начал создавать ее в начале 70-х гг. XIX в.

Используя монографию Ф. А. Медведева [79], кратко скажем об истории обоснования в XIX в. условий R-интегрируемости. Год 1875-й является особенным для теории интеграла Римана: в этом году пять математиков из разных стран независимо друг от друга опубликовали работы по вопросу об R-интегрируемости (Дарбу во Франции, То́ме и Дюбуа-Реймон в Германии, Асколи в Италии, Смит в Англии). Они используют различную терминологию и обозначения основных понятий в теории интеграла Римана, а мы приводим современные.

Предполагалось, что функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$. Производилось разбиение Π отрезка $[a,b]$ на n частей $[x_{i-1},x_i]$. Интеграл определяли как предел интегральной суммы, т. е.

$$I=\lim_{d(\Pi)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

где $d(\Pi)$ – диаметр разбиения Π (наибольшая из длин частей $[x_{i-1},x_i]$ разбиения Π). В 1875 г. все указанные выше математики ввели верхние и нижние суммы

$$S(\Pi)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1}),\ \ s(\Pi)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_{i-1}-x_i),$$

где $M_i=\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]}f(x)$, $m_i=\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]}f(x)$ (точные верхняя и нижняя грани функции $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1},x_i]$). Впрочем, Смит вместо точных граней функции имеет в виду наибольшее и наименьшее значения функции (оно может не существовать), но преимуществом работы Смита являются его примеры нигде не плотных множеств, о которых говорилось выше. (В печати определение точных граней функции появилось, вероятно впервые, в работе Кантора 1871 г., написанной после получения письма от Шварца, ученика Вейерштрасса, где сообщалось об использовании этого понятия Вейерштрассом [79, с. 197].) Те же пять математиков ввели тогда также верхний и нижний интегралы $\overline{I}$ и $\underline{I}$. Поскольку понятия точных граней было новым, эти интегралы были введены тогда как пределы сумм $S(\Pi)$ и $s(\Pi)$ при $d(\Pi)\to 0$, а не в принятом в настоящее время эквивалентном виде

$$\overline{I}=\inf_{\Pi}S(\Pi),\qquad \underline{I}=\sup_{\Pi}s(\Pi).$$

Со временем понятия верхних и нижних сумм, верхнего и нижнего интегралов стали связывать с **Жаном Гастоном Дарбу (1842–1917)**, работа которого получила широкую известность. Основная цель работ указанных выше пяти математиков состояла в доказательстве критериев R-интегрируемости в виде критерия Римана с первым или вторым условием, либо (как у Дарбу) в виде совпадения верхнего и нижнего интегралов, т. е. $\overline{I}=\underline{I}$. В той или иной степени им это удавалось, хотя и не всем.

Из этих математиков только Асколи явно принял условие $\overline{I}=\underline{I}$ в качестве второго определения интеграла, но его работа была не сразу замечена. В 1881 г. этим равенством определил интеграл итальянский математик Вито Вольтерра (1860–1940), предложивший современные названия и обозначения верхнего и нижнего интегралов. В 1884 г. такое же определение интеграла дал итальянский математик Дженокки.

Но все указанные выше математики вводили верхний и нижний интегралы как пределы, соответственно, верхней и нижней сумм, ссылаясь на давно известную теорему о пределе ограниченной монотонной функции числовой переменной и используя эту теорему и для функций $S(\Pi)$ и $s(\Pi)$ разбиения Π. А в определении этих сумм использовались понятия точных граней функции, которые были еще

совсем новыми. На это несоответствие обратил внимание итальянский математик **Джузеппе Пеано (1852–1932)**, отметивший в 1883 г., что в определении интеграла Римана, а также верхнего и нижнего интегралов можно обойтись без понятия предела. В 1895 г. он опубликовал заметку, специально посвященную определению интеграла, где впервые ввел верхний и нижний интегралы $\overline{I}$ и $\underline{I}$ как соответствующие точные грани множеств верхних и нижних сумм, а интеграл определил через совпадение $\overline{I}$ и $\underline{I}$, устранив понятие предела из этих определений.

В 1901 г. французский математик **Анри Леон Лебег (1845–1941)** ввел понятие интеграла, которое носит его имя и является одним из наиболее важных обобщений интеграла. Он ввел также понятие меры в $\mathbb{R}^n$ и, в частности, понятие лебеговой меры нуль в $\mathbb{R}$. Ему принадлежит следующий критерий интегрируемости функции по Риману: для существования интеграла Римана $\int_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была ограничена на $[a,b]$ и множество ее точек разрыва имело лебегову меру нуль. Лебег доказал в 1902 г. достаточность этого критерия, а в 1904 г. – необходимость [79, с. 210].

Работа Бернхарда Римана «О числе простых чисел, не превосходящих данной величины» (1859) относится к аналитической теории чисел. Она имеет скорее теоретико-функциональный, чем теоретико-числовой характер. Риман опубликовал ее сразу после избрания его членом Берлинской академии наук.

Функцию $\pi(x)$, выражающую число простых чисел, не превосходяших числа x, можно записать в виде

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1,$$

где в сумме добавляется слагаемое 1 для каждого простого числа $p \in [2,x]$. Это ступенчатая функция, в простых числах она имеет скачок, равный еденице, а между простыми числами она постоянна. На первый взгляд, $\pi(x)$ ведет себя совершенно нерегулярно. При больших x длина ее ступенек может быть сколь угодно большой, так как, например, при $n > 2$ на отрезках $[n!+2, n!+n]$ нет простых чисел. Но имеются как малые, так и большие простые числа, отличающиеся на число 2, это так называемые простые числа-близнецы (например, 5 и 7, 3581 и 3583). До сих пор

неизвестно, конечно или бесконечно множество пар простых чисел-близнецов. Тем не менее в распределении простых чисел среди натуральных имеются удивительные закономерности.

Тот факт, что простых чисел бесконечно много, доказал методом от противного уже Евклид в своих «Началах». Иное, прямое доказательство этого факта дал Л. Эйлер с помощью своего тождества для дзета-функции.

В нашем пособии [234] на с. 208 упоминалось о том, что для функции $\pi(x)$, выражающей число простых чисел, не превосходящих x, Лежандр в 1808 г. привел эмпирически полученную из таблицы простых чисел формулу $\pi(x) \approx \dfrac{x}{\ln x - 1{,}08366}$, Гаусс, исследуя таблицу простых чисел, привел свою эмпирическую формулу $\pi(x) \approx \int\limits_2^x \dfrac{dt}{\ln t}$ без доказательства в одном письме 1849 г., опубликованном в 1863 г. П. Л. Чебышев в двух работах в 1849 г. добился первого крупного успеха в установлении закона распределения простых чисел. Он доказал, что если предел отношения $\dfrac{\pi(x)}{x/\ln x}$ при $x \to +\infty$ существует, то он должен быть равен единице. Кроме того, для этого отношения он получил оценки снизу и сверху, очень близкие к единице, но не доказал, что предел этого отношения при $x \to +\infty$ существует.

Риман поставил себе задачу теоретически обосновать асимптотический закон распределения простых чисел в виде $\pi(x) \sim \int\limits_2^x \dfrac{dt}{\ln t}$ при $x \to +\infty$ (функция $\mathrm{Li}x = \int\limits_2^x \dfrac{dt}{\ln t}$ – это интегральный логарифм в неполном виде). К тому времени формула Гаусса, как отмечает Риман в конце своей статьи, была проверена по таблице простых чисел до $x = 3000000$.

Работа Римана изложена очень сжато, законность действий не всегда обоснована, а ряд утверждений приведен без доказательства. Она получила широкую известность благодаря аналитическому исследованию примененной в работе дзета-функции $\zeta(s)$. Риману принадлежит и это ее обозначение. Для функции $\Gamma(s)$ он использует обозначение Гаусса $\Pi(s-1)$, а функцию $\pi(x)$ обозначает через $F(x)$.

Эйлер определял дзета-функцию при действительных $s > 1$ в виде ряда $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ и широко использовал свое знаменитое тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

где p пробегает все простые числа. Риман считает здесь s комплексным числом $s=\sigma+it$. Он использует ее интегральное представление

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt,\quad \operatorname{Re}s>1,$$

которое легко получить, если в $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ подставить выражение $\frac{1}{n^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}t^{s-1}e^{-nt}dt$ и переставить операции суммирования и интегрирования. Подынтегральную функцию указанного выше представления для $\zeta(s)$ Риман интегрирует по контуру и получает функциональное уравнение для $\zeta(s)$, которое можно записать в виде

$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)\zeta(1-s),\quad s\neq 1,$$

(приводят и в иной записи, делая замену $1-s=s'$). Это уравнение позволяет находить значения $\zeta(s)$ при $\operatorname{Re}s<1$ по значениям при $\operatorname{Re}s>1$ и тем самым аналитически продолжать ее на всю комплексную плоскость при $s\neq 1$. Функция $\zeta(s)$ регулярна при всех s, кроме $s=1$, где она имеет простой полюс.

Особенно интересным является вопрос о нулях ζ-функции, которые являются особыми точками используемой им функции $\ln\zeta(s)$. Их Риман исследует с помощью функционального уравнения для ζ-функции, домножая функцию $\zeta(s)$ для удобства на такие множители, чтобы функциональное уравнение не менялось при замене s на $1-s$, где $s=\sigma+it$. При $\sigma>1$ функция $\zeta(s)$ не имеет нулей, что видно из тождества Эйлера для $\zeta(s)$. При $\sigma<0$, как это видно из функционального уравнения, нулями $\zeta(s)$ являются точки $s=-2n$, где $n=1,2,\ldots$, (эти нули называются тривиальными), других нулей при $\sigma<0$ нет.

Риман в своей работе высказал предположение, что все остальные (т. е. нетривиальные) нули дзета-функции имеют действительную часть, равную $\frac{1}{2}$, т. е. лежат на прямой $s=\frac{1}{2}+it$. Это и есть знаменитая гипотезам Римана о нулях ζ-функции. Несмотря на многочисленные попытки, она до сих пор не доказана и не опровергнута. Риман привел без доказательства приближенную формулу

$\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$ для числа нулей ζ-функции в прямоугольнике $0<\sigma<1$, $0<t\le T$, она была доказана Мангольдтом в 1894 г. В 1893 г. французский математик Ж. Адамар доказал, что $\zeta(s)$ имеет на прямой $\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}$ бесконечно много нулей [108, с. 229]. В 1896 г. Адамар и бельгийский математик Валле-Пуссен независимо доказали, что на прямых $\operatorname{Re} s=0$ и $\operatorname{Re} s=1$ нет нулей ζ-функции. В 1900 г. Д. Гильберт включил гипотезу Римана в список 23 нерешенных проблем как восьмую проблему вместе с гипотезой Гольдбаха о простых числах [271, с. 37–38, 128–130]. Математический институт Клэя (Кембридж, штат Массачусетс) выплатит миллион долларов США тому, кто докажет гипотезу Римана. На 2004 г. с помощью ЭВМ проверено более 10^{13} первых из нетривиальных нулей ζ-функции, они лежат на прямой $\operatorname{Re} s=\frac{1}{2}$. С современным состоянием вопроса о гипотезе Римана можно познакомиться, например, по статье «Гипотеза Римана» в Википедии.

Кратко наметим схему теоретико-числовых рассуждений Римана в рассматриваемой статье, подробнее см. в [107, с. 166–169]. Он логарифмирует равенство Эйлера $\zeta(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$, где p пробегает все простые числа, и разлагает $\ln\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$ в ряд, в котором полагает $p^{-ns}=s\int_{p^n}^{\infty}x^{-s-1}dx$, и приходит к равенству

$$\frac{\ln\zeta(s)}{s}=\int_1^{\infty}f(x)x^{-s-1}dx,\quad \text{где}\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}F(x^{\frac{1}{n}})$$

(через $F(x)$ Риман обозначает функцию $\pi(x)$). Обратное интегральное преобразование (сейчас его называют преобразованием Лапласа-Меллина) дает

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\ln\zeta(s)}{s}x^s ds.$$

Здесь интегрирование производится по прямой $\operatorname{Re} s=a>1$, параллельной мнимой оси. Используя свои результаты о $\zeta(s)$, Риман получает оценки для $f(x)$. Выражая функцию $F(x)$ через $f(x)$, он приходит к тому, что $F(x)\approx \operatorname{Li}x=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}$ с некоторыми добавочными членами вида $\frac{1}{n}\operatorname{Li}(x^{\frac{1}{n}})$ при $x\to+\infty$. Теоретико-числовые рассуждения

Римана не являются вполне строгими. Строгое доказательство асимптотического закона распределения простых чисел дали независимо и одновременно в 1896 г. Адамар и Валле-Пуссен.

Бернхард Риман внес большой вклад в геометрию, а, как оказалось позже, в общую теорию относительности и механику, введя понятие риманова пространства в своей лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Это была его пробная лекция, прочитанная в июне 1854 г. перед членами философского факультета Гёттингенского университета в присутствии К. Гаусса, выбравшего эту тему из предложенных Риманом трех тем. Она была опубликована в 1868 г. посмертно. Выше говорилось о том, какую восторженную реакцию Гаусса она вызвала. В работе очень мало формул, так как она была предназначена не только для математиков. В [258] лекция приведена с обширным комментарием Г. Вейля, см. также [51, с. 263–272], [108, с. 83–87].

Риман знал о неевклидовой геометрии Лобачевского–Бояи, основные элементы которой еще ранее получил Гаусс, но не опубликовал. Кроме того, Риман знал работу Гаусса 1827 г. по внутренней геометрии поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве [289, с. 31]. Это, а также уже входившее в употребление понятие n-мерного пространства дало возможность Риману определить новый раздел геометрии n измерений – риманову геометрию, позволившую по-новому осмыслить и наши представления об окружающем нас физическом пространстве.

Гаусс разработал внутреннюю геометрию двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве E^3. Эта геометрия изучает метрические свойства фигур на таких поверхностях (длину кривых, площадь, объем фигур), кривизну поверхностей и др. Уже до Римана некоторые метрические свойства фигур рассматривались и в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Римановы пространства и внутренняя геометрия в них – риманова геометрия – представляют собой обобщение гауссовой теории двумерных поверхностей и внутренней геометрии в них на n-мерный случай, но «в малом», т. е. в окрестностях точек или в малых областях риманова пространства приближенно имеет место евклидова геометрия (с точностью до малых высшего порядка по сравнению с размерами окрестности или области).

В рассматриваемой лекции Риман вводит свою геометрию следующим образом. Определяет «протяженные многообразия» при $n = 1, 2, 3$ и далее – «n-кратно

протяженное многообразие», т. е. кривую или область в n-мерном пространстве точек x с координатами $(x_1,\dots,x_n)$. Затем ставит и обсуждает вопрос о выборе метрики в таком пространстве, отметив, что для «метрических отношений» «прочное основание заложено в знаменитом сочинении о кривых поверхностях г. тайного советника Гаусса» [258, с. 283]. Риман приходит к выводу, что линейный элемент ds должен быть однородной функцией первой степени от дифференциалов dx_i. В евклидовой n-мерной геометрии линейный элемент как расстояние между двумя точками имеет вид $\Delta s=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}$, где Δx_i – разности соответствующих координат точек. Риман записывает это в дифференциалах: $ds=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2}$. Линейный элемент (элемент длины) кривой в своем пространстве Риман по аналогии с первой квадратичной формой поверхности в евклидовом пространстве E^3 [289, с. 31] берет (мы даем в современной записи) в виде

$$ds=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(x)dx^i dx^j}\,, \tag{1}$$

где $g_{ij}=g_{ji}$ $(i,j=1,\dots,n)$, $x=(x^1,\dots,x^n)$. Говорят, что формула (1) задает метрику (закон измерения расстояний) риманова пространства. При этом ds называют элементом длины или линейным элементом, а симметричный тензор g_{ij} – метрическим тензором. Квадратичная форма в (1) в каждой точке x пространства предполагается положительно определенной. Риман в своей лекции не записывает формулу (1) в обозначениях, а формулирует словесно: «Поэтому я позволю себе ограничиться многообразиями, для которых линейный элемент задается как квадратный корень из дифференциального выражения второй степени» [258, с. 284]. Он отмечает, что линейный элемент при малых дифференциалах должен быть приближенно равен линейному элементу евклидова n-мерного пространства.

Далее Риман говорит о геодезических (кратчайших линиях) в своем пространстве, а также вводит аналог гауссовой кривизны K в данной точке в данном двумерном направлении. Особую роль играют выделенные Риманом три вида n-мерных пространств постоянной кривизны, т. е. таких, у которых кривизна не меняется при переходе от точки к точке и от одного двумерного направления к

другому. Это пространства: положительной кривизны $(K > 0)$, нулевой кривизны $(K = 0)$ и отрицательной кривизны $(K < 0)$.

При $K > 0$ риманову геометрию называют геометрией Римана (не путайте эти разные термины), или эллиптической. При $K = 0$ – параболической (по Клейну) геометрией, она «в малом» совпадает с евклидовой, если квадратичная форма в (1) является положительно определенной. При $K < 0$ риманова геометрия называется гиперболической, это обобщение геометрии Лобачевского–Бояи «в малом» на n-мерный случай. В предположении, что квадратичная форма в (1) является неопределенной (при этом ds может быть и мнимым) получается обобщение римановой геометрии – псевдоевклидова, псевдориманова.

Скажем кратко о геометрии Римана, т. е. эллиптической. Это один из видов римановой геометрии, а именно с постоянной положительной кривизной $(K > 0)$. Эллиптическое n-мерное пространство только наличием в нем метрики отличается от действительного проективного пространства P^n. Прямая Римана (эллиптическая) является замкнутой конечной линией. В этой геометрии нет параллельных прямых. Моделью двумерной эллиптической плоскости с кривизной $K = \frac{1}{R^2}$ может служить в евклидовом трехмерном пространстве сфера радиуса R с отождествленными диаметрально противоположными точками. Отождествление здесь означает, что каждая пара таких точек сферы считается одной «точкой» эллиптической плоскости. Большие окружности сферы, т. е. ее сечения плоскостями, проходящими через ее центр, называют «прямыми». При этом очевидно, что любые две такие «прямые» пересекаются и притом только в одной «точке», а через любые две «точки» проходит единственная «прямая». Метрические свойства эллиптической плоскости «в малом» совпадают с метрическими свойствами сферы [197, с. 987–991]. В частности, сумма углов любого треугольника в эллиптической геометрии больше двух прямых.

Ф. Клейн в своих «Лекция о развитии математики в XIX столетии» [140], впервые опубликованных в 1926 г., пишет: «Речь Римана произвела сенсацию, когда после его преждевременной кончины (1866 г.) она была в 1868 г. опубликована Дедекиндом в 13-м томе *Göttinger Abhandlungen.* Риман в этой работе не только положил начало глубоким математическим исследованиям (здесь начинается новая математическая дисциплина – учение об общих свойствах и классификации

дифференциальных форм $\sum a_{ik} dx_i dx_k$), но и коснулся вопроса о внутреннем устройстве нашего представления о пространстве, а также вопроса о применимости его идей к проблеме объяснения природы» [140, с. 195].

Позже Риман частично разработал аналитический аппарат своей геометрии, это видно из его работы «Математическое сочинение…», написанной в 1861 г. и представленной Парижской академии наук. Здесь он исследует изотермические свойства распределения теплоты в твердом теле и получает некоторые новые важные элементы своей теории многообразий.

Исследования Римана в геометрии продолжил немецкий математик **Эльвин Бруно Кристоффель (1829–1900)** в работе «О преобразовании однородных дифференциальных выражений» (1869), т. е. дифференциальных форм $\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$.

Для таких форм он ввел носящий его имя символ, который связан с метрическим тензором следующим образом:

$$\Gamma^i_{jk} = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right), \; \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}.$$

Итальянский математик **Грегорио Риччи-Курбастро (1853–1925)** в работе «Принципы теории дифференциальных квадратичных форм» (1884) разработал тензорное исчисление, а затем развил его вместе со своим учеником **Туллио Леви-Чивита (1873–1941)** в «Методах абсолютного дифференциального исчисления» (1901). Этим термином они называют тензорное исчисление. Вскоре оно нашло широкое применение в римановой геометрии, общей теории относительности и механике.

В римановой геометрии после Римана условие положительной определенности квадратичной формы, задающей метрику, не всегда соблюдалось. Это способствовало более широкому ее применению. Одним из важнейших применений риманова геометрия нашла в общей теории относительности, которая является обобщением классической (ньютоновской) механики на четырехмерное пространство-время. Классическая механика имеет дело только со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. Специальная (или частная) теория относительности не учитывает тяготения. Ее почти полностью создал А. Пуанкаре, а завершил А. Эйнштейн, она оформилась у них в 1905 г. Метрика геометрии в ней задается в каноническом виде формулой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - (ct)^2 \qquad (2)$$

и называется псевдоевклидовой метрикой, здесь t – время, c – скорость света в вакууме.

Общую теорию относительности (релятивистскую теорию тяготения) начал создавать А. Эйнштейн вместе с М. Гроссманом, а к ее завершению подключился Д. Гильберт, она оформилась у них в 1915 г. Метрика геометрии в ней задается формулой (1), где теперь $n = 4$, g_{ij} – тензор гравитации, он выражается через потенциал поля тяготения. При слабом поле тяготения эта метрика близка к псевдоевклидовой. Подробнее об истории создания теории относительности речь будет идти в очерке об А. Пуанкаре, см. также [151, с. 397–407], [152, с. 541–557], [266].

Успехи теории относительности в подтверждении некоторых астрономических эффектов привлекли внимание к римановой геометрии многих математиков XX в. В [123, с. 106–107] указано более трех десятков математиков XX в., занимавшихся вплоть до настоящего времени вопросами римановой геометрии и ее обобщений.

Кроме теории римановых пространств, Риман является создателем еще одной геометрической дисциплины – топологии. Риман пользуется не термином Листинга «топология» (от греч. *τοπος* – «место»), а термином Лейбница «*analysis situs*» (от лат. *situs* – «положение», «место»). Выше уже говорилось о топологии двумерных алгебраических (римановых) поверхностей, приведенной в статье Римана «Теория абелевых функций» (1857), о роде p таких поверхностей. Отметим еще, что в нашем пособии [234] на с. 246 мы упоминали о работе 1812–1813 гг. швейцарского математика С. Люилье, в которой обобщена эйлерова характеристика $\chi = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ (α_0 – число вершин, α_1 – число ребер, α_2 – число граней) многогранника в трехмерном пространстве на случай многогранников, имеющих p сквозных отверстий, с некоторым условием на грани. Для таких многогранников $\chi = 2 - 2p$, а число p называется родом многогранника.

В лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1854) Риман начинает рассматривать топологию в n-мерном пространстве. В обзоре, приведенном в конце лекции, он делает примечание к разделу 1 «Понятие n-кратно протяженной

величины»: «Раздел 1 является одновременно введением к исследованиям по *analysis situs*» [258, с. 292]. В собрании его сочинений, опубликованном в 1876 г., содержатся «Фрагменты, относящиеся к *analysis situs*», в которых топологические свойства двумерных поверхностей обобщаются на n-мерное многообразие, называемое им «n-мерником» [258, с. 294–296]. Здесь Риман определяет n-мерники, называемые в настоящее время гомологичными. Далее он дает определение связности порядка $m+1$ в n-й размерности и пишет: «Непрерывно протяженное многообразие называется односвязным, если порядок связности в каждой размерности равен единице» [258, с. 294]. Для двумерной поверхности рода p порядок связности Римана равен $2p+1$. Далее Риман выясняет зависимости порядка связности границы многообразия от порядка связности самого этого многообразия.

Идеи Римана о «связностях» многомерных многообразий подробно изложил его друг, профессор университета и директор Высшей нормальной школы в Пизе **Энрико Бетти (1823–1892)** в работе «О пространствах произвольного числа измерений» (1871). Под «пространствами» здесь имеются в виду многообразия в многомерных евклидовых пространствах. Через p_m+1 Бетти обозначает порядок связности m-го рода (в n-й размерности). Далее развивал идеи Римана и Бетти французский математик **Анри Пуанкаре (1854–1912)**, создавший в конце XIX в. комбинаторную топологию. См. также [51, с. 275–277].

Риман выполнил интересное исследование по минимальным поверхностям. Теория минимальных поверхностей имеет следующую историю. Первым начал исследовать такие поверхности Ж. Л. Лагранж в 1762 г., рассмотрев вариационную задачу: среди всех поверхностей, которые проходят через заданную пространственную замкнутую кривую, найти ту, для которой площадь, ограниченная этой кривой, будет наименьшей. Он показал, что минимальная поверхность вида $z=f(x,y)$ необходимо должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0,$$

где обозначено $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$, $r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Ж. Мёнье в 1776 г. рассматривал поверхности, для которых средняя кривизна $H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$ в каждой точке равна нулю (здесь k_1 и k_2 – главные кривизны, введенные Эйлером). Он указал

и две конкретные такие поверхности – катеноид (поверхность, образованная вращением цепной линии вокруг ее оси) и геликоид (винтовая поверхность). Г. Монж в 1776 г. показал, что поверхности $z = f(x, y)$, для которых $H = 0$, удовлетворяют указанному выше дифференциальному уравнению. С тех пор поверхности с $H = 0$ стали называть минимальными. В 1849 г. бельгийский физик Ж. Плато предложил опытным путем создавать минимальные поверхности, используя мыльные пленки, натянутые на проволочные контуры, поэтому вариационную задачу отыскания минимальных поверхностей нередко называют задачей Плато. В 50-х гг. XIX в. О. Бонне в серии работ дал новые доказательства известных к тому времени фактов о минимальных поверхностях и установил некоторые новые свойства таких поверхностей [197, т. 3, с. 684–689].

Риман выполнил свои исследования минимальных поверхностей в 1860–1861 гг. Рукопись, содержащую лишь формулы, он передал Гаттендорфу, который снабдил ее текстом и опубликовал в 1867 г. в виде статьи. Риман исходит от вариации интеграла для площади поверхности, заданной в виде $x = f(y, z)$. Равенство нулю этой вариации является необходимым условием того, чтобы поверхность была минимальной. Риман переходит к сферическому изображению поверхности, использованному ранее Родригом и Гауссом. При этом точки на сфере он записывает в виде комплексных чисел $\eta = \mathrm{tg}\frac{r}{2}e^{\varphi i}$. Риман использует, в частности, конформные отображения областей на сфере на плоскость. В результате ряда замен переменных и выполнения преобразований ему удается получить, хотя и в очень сложном виде, общее параметрическое уравнение односвязной минимальной поверхности. В качестве примеров Риман решает задачу нахождения минимальной поверхности, проходящей через три прямые, различным образом расположенные в трехмерном пространстве. Впрочем, в 1866 г. К. Вейерштрасс указал общее и притом более простое параметрическое представление произвольной односвязной минимальной поверхности, (см. 197, т. 3, с. 685). Ученик Вейерштрасса Г. А. Шварц решил задачу Плато в случае произвольных полигональных контуров.

В области механики Риману принадлежит работа «О движении жидкого однородного эллипсоида» (1861), относщаяся к теории фигур небесных тел. Еще Ньютон показал, что вращение Земли привело к ее небольшой сплющенности в

области полюсов. Это подтвердили геодезические измерения 1737 г. в Лапландии, выполненные экспедицией под руководством Мопертюи, в которую входил и Клеро. В работе, поданной на конкурс Парижской АН, объявленный в 1738 г., Маклорен показал, что фигурами равновесия быстро и равномерно вращающейся тяжелой однородной жидкости являются сфероиды (сплющенные эллипсоиды вращения). Движение таких эллипсоидов подробно изучал Лаплас в своей «Небесной механике» (1799). В 1834 г. Якоби показал, что допустимыми фигурами равновесия может быть и «серия» трехосных эллипсоидов. Указанные авторы предполагали, что такие жидкие эллипсоиды вращаются как целое (подобно твердому телу) около своей наименьшей оси. Дирихле в своем мемуаре, изданном с дополнениями Дедекиндом в 1860 г., обобщил задачу, предположив, что координаты движущихся чатиц вращающегося жидкого эллипсоида являются линейными однородными функциями их начальных значений и произвольными функциями времени. Но вычисления в этом мемуаре выполнены лишь для некоторых частных видов эллипсоидов. Дедекинд нашел еще один класс решений.

Риман полностью решил задачу о форме фигур равновесия таких жидкостей при условиях Дирихле. Совокупность эллипсоидов Римана содержит эллипсоиды указанных выше авторов, а также еще три класса, найденные Риманом. Он затронул и задачу об устойчивости фигур равновесия, но, как выяснилось недавно, его исследование этого вопроса содержит ошибку. В дальнейшем вопросы устойчивости исследовались в XIX в. в классических работах А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре.

К математической физике относится большая работа Римана «О распространении плоских волн конечной амплитуды» (1859). Предполагая, что плоская звуковая волна движется вдоль оси Ox, а давление p в зависимости от плотности ρ задается произвольной возрастающей функцией $\varphi(\rho)$, Риман выводит систему, состоящую из двух нелинейных уравнений газовой динамики

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\varphi'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0,$$

где u – скорость в точке x в момент времени t. При таких предположениях эта система следует также из общей эйлеровой системы гидродинамики. Преобразуя

систему, Риман вводит новые переменные r и s, зависящие от u и ρ, а также новую функцию w от r и s, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} - m\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right) = 0,$$

где m либо постоянно, либо пропорционально $(r+s)^{-1}$ в зависимости от закона, которому подчиняется газ. Предполагается выполнение начальных условий. Риман решает это дифференциальное уравнение гиперболического типа методом, который позже был назван «методом Римана». При исследовании этой задачи Риман впервые обнаружил и исследовал явление разрывов скорости u («ударные волны») для газа. Позже в работе 1887 г. теорию ударных волн (скачков давления) в газах в общей форме независимо от Римана разработал французский математик Гюгонио.

К математической физике относится мемуар Римана «Математическое сочинение, в котором содержится попытка дать ответ на вопрос, предложенный знаменитейшей Парижской Академией». Риман послал эту работу на конкурс 1861 г. большой премии Академии на тему: «Определить, каково должно быть тепловое состояние произвольного твердого тела, чтобы система изотермических кривых, заданная в определенный момент времени, оставалась системой изотермических кривых в любой момент времени…». Выше мы уже упоминали об этой работе. Из-за недостатка времени Риман не успел провести все необходимые вычисления и привел ряд результатов без доказательства, поэтому работа Римана была отклонена Академией. Продолжить работу над этой темой Риману помешало состояние его здоровья.

Другие работы Римана по математической физике – это в основном небольшие заметки, наброски работ, которые он собирался написать, но не успел. Эти фрагменты, как и «Математическое сочинение…», были опубликованы после его смерти.

Главными направлениями научной деятельности Римана, к которым он приложил больше всего усилий, являются теория функций комплексного переменного и математическая физика. Основной вклад Римана в математическую физику – его лекции «Дифференциальные уравнения с частными производными математической физики». Они были опубликованы в 1869 г. в обработке его

слушателя Гаттендорфа. Выдающийся немецкий математик **Генрих Вебер (1842–1913)** переработал и дополнил их, они несколько раз переиздавались. На протяжении 50-ти лет эти лекции Римана–Вебера были настольной книгой многих математиков и физиков.

В отличие от Б. Больцано и К. Вейерштрасса, Риман не занимался вопросами формализации («арифметизации») математического анализа (кроме интеграла Римана) и критического обоснования используемых им методов. В отношении строгости изложения работы Римана уступают работам Вейерштрасса. Но следует иметь в виду, что в середине XIX в. теория аналитических функций, топология и математическая физика стали только складываться, во многом благодаря Риману, как самостоятельные науки. Поэтому Риману нередко недостает строгости доказательств теорем существования решений, как это было, например, с использованием «принципа Дирихле». Не уделяется внимания доказательствам единственности решений, используется не всегда четкий, нередко без проработки деталей стиль рассуждения. Но гениальная интуиция позволяет Риману избежать ошибок даже в сложных ситуациях. А богатство идей и поставленных Риманом гипотез (например, в [197, т. 2, с. 113–114] указано 5 его гипотез относительно ζ-функции, из которых одна до сих пор не доказана) были в дальнейшем предметом исследований многих математиков. Риману принадлежит также ряд работ по физике, на которых мы не останавливаемся, они были опубликованы в сборнике «Тяготение, электричество, магнетизм» (1875).

О Римане: [129; 258; 140, с. 274–305; 108, с. 83–90, с. 100–102, с. 188–202, с. 228–229; 107, с. 166–170; 51, с. 263–272, с. 275–277, с. 283–286; 79, гл. 5; 144, с. 41–45, с. 97–102; 197, т. 2, с. 112–114; 197, т. 4, с. 987–1034; 13, с. 527–531; 123, с. 102–107].

Вейерштрасс

1. Жизненный путь Вейерштрасса.

При написании этого пункта мы опираемся на [131] и [132].

Один из самых выдающихся немецких математиков **Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897)** родился в небольшом городке Остенфельд в Вестфалии,

недалеко от г. Мюнстер в северо-западной части Германии. Его отец Вильгельм был широко образованном человеком, происходил из лютеранской семьи, но стал католиком, женившись на католичке. В молодости отец работал школьным учителем, а затем чиновником налоговой службы, переезжая с места на место. В семье было семеро детей, из них Карл был старшим. Когда ему было 10 лет, от кори умерли его сестра и брат, а в следующем году умерла от тифа его мать. В 1828 г. отец Вейерштрасса женился вторично. После 1843 г., когда умерла еще одна сестра Карла, в семье осталось четверо детей: Карл, его младший брат Петер и две его сестры – Клара и Эльза. Никто из них никогда не был в браке. Мачеха хорошо заботилась о детях и доме. Дети, кроме Карла, были музыкальны. Брат Карла стал школьным учителем, преподавал латынь. Из иностранных языков отец и дети хорошо знали французский.

В то время в Германии было всеобщее начальное образование. Карлу приходилось несколько раз менять начальную школу в связи с переездами отца, связанными с работой. В 1829 г. семья переехала в г. Падерборн в Восточной Вестфалии, где отец получил должность казначея. Там Карл поступил в католическую классическую гимназию. В ней тогда обучалось около 300 школьников, она была второй в Вестфалии по числу обучавшихся после гимназии в г. Мюнстер – административном центре Вестфалии. Учиться в гимназии было непросто из-за большой учебной нагрузки школьников и высоких требований к учебе. Главное внимание уделялось изучению языков, особенно латинскому. Математика изучалась в хорошем объеме, включая даже сведения из диофантова анализа и элементарной теории рядов. Карл Вейерштрасс проявил себя в гимназии очень хорошим учеником.

На собраниях по окончании учебного года в честь лучших учеников исполнялись музыкальные произведения, в честь Карла музыка звучала много раз. Он самостоятельно изучал материал намного вперед, что позволило ему окончить гимназию не за положенные 7 лет, а за 5,5 года, перескочив через один класс. В списках, составляемых в конце каждого учебного года по итогам успеваемости, Карл занимал первое место по нескольким предметам. Гимназию он окончил в 1834 г. как лучший из учеников (*primus omnium* – первый из всех). Известно, что гимназист Карл Вейерштрасс брал в школьной библиотеке для просмотра «Журнал чистой и прикладной математики», который издавал немецкий математик и инженер А. Л.

Крелле (1780–1855) с 1826 г. Этот журнал вскоре стал лучшим математическим журналом в Европе. Там печатались статьи многих математиков, ставших знаменитыми, начиная с Н. Х. Абеля. Конечно, у Карла еще было недостаточно знаний для чтения столь серьезной математической литературы, но она пробудила в нем интерес к новейшим исследованиям в математике.

Видя блестящие успехи Карла в гимназии, отец решил определить его к поступлению в Боннский университет на юридический факультет, считая, что в качестве юриста Карл обеспечит себе блестящую карьеру. Город Бонн расположен на западе Германии на реке Рейн. Там в 1818 г. был открыт университет. Подчинившись воле отца, Карл Вейерштрасс в 1834 г. поступил на юридический факультет этого университета, хотя юриспруденция не привлекала его, он предпочитал бы философский факультет, где изучались естественно-математические науки.

В то время в Германии студенты университетов пользовались большой свободой в обучении, оно не было связано обязательными планами занятий. Студенту нужно было записаться и прослушать в семестр определнное число курсов лекций по его выбору. За курсы частных лекций нужно было платить. Песещение лекций контролировалось мало. Оценок знаний в течение семестров не было, экзаменов в конце семестров тоже не было. Студенты чувствовали себя привольно после жесткой системы обучения в гимназиях. Для получения диплома в конце обучения в университетах нужно было сдать много трудных и продолжительных экзаменов.

Общественной жизни студенты учились за пределами университетов, объединяясь в корпорации. Для обсуждениях своих дел студенты собирались в пивных, закрепленных, по существу, за данной корпорацией. Нередко между студентами возникали поединки, обычно на затупленных рапирах. Карл Вейерштрасс в Боннском университете был активным участникм студенческой корпорации «Силезия», посещал студенческие пирушки, был очень искусным фехтовальщиком.

Вейерштрасс мало посещал лекций на юридическом факультете. Зато он много занимался самостоятельно математикой. Один семестр он слушал на философском факультете лекции знаменитого геометра Ю. Плюккера, но геометрия его мало занимала. Других крупных математиков в Боннском университете тогда не было. Настольными книгами Вейерштрасса в то время были: книга Лапласа «Небесная механика» (опубликована в 1795–1825 гг.) и книга Якоби «Новые основания теории

эллиптических функций» (1829). Решение Вейерштрасса не заниматься юридическими науками, формально числясь студентом юрфака, а заниматься математикой, далось ему, по-видимому, нелегко. В 1840 г. он писал, что противоречия между его интересами и долгом привело его к телесным и душевным страданиям. Он понимал, что отец не одобрит его отказа от профессии юриста.

Вейерштрасс глубоко заинтересовался новой в то время теорией эллиптических функций. Об истории возникновения и разработки этой теории мы писали в [289] в очерках о Гауссе (с. 37–42), Абеле (с. 105–107) и Якоби (с. 120–124). Гаусс первым начал разрабатывать эту теорию, но ничего не публиковал об этом. Вейерштрасс несомненно был знаком с большой работой Абеля «Исследования об эллиптических функциях», опубликованной в двух томах журнала Крелле в 1827–1928 гг.

Читать сложную книгу Якоби Вейерштрассу было трудно. Помог случай: один студен привез из Мюнстера запись лекций по теории эллиптических функций, которые прочел в Мюнстерской академии **Христоф Гудерман (1798–1852)**, работавший там профессором математики с 1832 г. Эти ясно написанные лекции попали в руки Вейерштрасса. Гудерман учился в Гёттингенском и Берлинском университетах, работал сначала учителем в гимназии. Он занимался геометрией на сфере, теорией гамма-функций, разложением функций в степенные ряды, составил таблицы гиперболических функций. Рано включился в разработку теории эллиптических функций. Он называл эллиптические функции модулярными, на этот термин закрепился за иными функциями. Гудерман ввел очень удобные, используемые и в настоящее время, обозначения основных эллиптических функций Якоби в виде $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$, $\mathrm{dn}u$. Свои работы он опубликовал в журнале Крелле. В частности, там он опубликовал в 1838 г. по материалу своих лекций большую работу по теории эллиптических функций Якоби, уже после того, как Вейерштрасс познакомился с его лекциями и приступил к самостоятельным исследованиям в этой области.

После четырехлетнего пребывания в Боннском университете Вейерштрасс поздней осенью 1838 г. возвращается домой без диплома и не сдавая ни одного экзамена, к тому же в плохом состоянии здоровья. Это вызвало буквально шок в семье. Особенно переживал отец, ему было бы трудно материально поддерживать обучение сына в университете теперь уже математическим наукам. Полгода

Вейерштрасс провел дома в Падерборне и поправлял свое здоровье. Знакомый судебный чиновник посоветовал Карлу поступить в Мюнстерскую академию, чтобы там в краткие сроки подготовиться к сдаче экзаменов на должность учителя гимназии. Это было по душе Карлу, так как там работал Гудерман.

После Венского конгресса 1815 г. древний город Мюнстер стал административным центром Прусской северо-западной провинции Вестфалии. В 1870 г. там был открыт университет. После основания Боннского университета Мюнстерский лишился двух факультетов и был реорганизован в так называемое «Академическое учебное заведение Мюнстера», готовившее учителей для гимназий.

В мае 1839 г. Вейерштрасс был зачислен в Мюнстерскую академию. Гудерман был восхищен знаниями Вейерштрасса по математике, приобретенными самостоятельно во время пребывания в Боннском университете. Вейерштрасс слушал лекции в Мюнстерской академии только Гудермана в течение одного семестра. Число слушателей лекций Гудермана было невелико. В летнем семестре 1839 г. Гудерман читал лекции по аналитической геометрии (было 13 слушателей), по исчислению бесконечно малых (3 слушателя), по модулярным (эллиптическим) функциям – только Вейерштрасс.

Уже осенью 1839 г. Вейерштрасс выбывает из числа студентов академии для того, чтобы готовиться к государственным экзаменам. По его заявлению министерская комиссия в Берлине дала ему допуск к экзаменам. В мае 1840 г. королевская экзаменнационная комиссия в Мюнстере дала ему задание для письменного экзамена, на подготовку к которому отводилось полгода. Требовалось написать три работы: по философии (на латинском языке), по математике и по педагогике. Математическая работа состояла из трех заданий: написать статью на тему «О разложении модулярных функций» (ее выбрал сам Вейерштрасс) и решить две предложенные Гудерманом задачи – по элементарной математике и по теоритической механике.

Гудерман написал восторженный отзыв о первой математической работе Вейерштрасса, отметив: «Тем самым кандидат входит достойным образом в ряд увенчанных славой исследователей». Официальный отзыв экзаменационной комиссии был сдержаннее, но и там говорилось: «Первая математическая работа на тему, выбранную кандидатом, свидетельствует о его исключительном таланте к

решению задач высшего анализа». После письменной работы были еще устные экзамены и два пробных занятия в Мюнстерской гимназии. Звание школьного учителя присуждалось только после пробного учебного года, поэтому Вейерштрасс преподавал в этой гимназии в течение 1841–1842 учебного года. Позже он написал своему ученику Г. А. Шварцу, что если бы вовремя узнал об отзыве Гудермана, то сам бы стал хлопотать о месте работы в высшем учебном заведении.

В мюнстреский период жизни Вейерштрасса определился его интерес к разработке теории аналитических функций. За это время он написал после экзаменнационной работы еще три работы. Там он, в частности, ввел так называемый ряд Лорана (за два года до опубликования его Лораном), впервые (до Коши) ввел понятие равномерной сходимости ряда, впервые рассмотрел вопрос об аналитическом продолжении степенных рядов. По не вполне понятным причинам эти очень важные работы Вейерштрасса не были тогда опубликованы, а включены только в 1894 г. в первый том его «Математических трудов». Если бы эти работы были опубликованы вовремя, ему не пришлось бы в течение 14 лет работать школьным учителем. Вообще Вейерштрасс публиковал свои работы не очень часто, стараясь придать им строгий и законченный вид. Многие из своих достижений он излагал в своих замечательных лекциях, читанных в Берлинском университете с 1856 г.

В 1842 г. 27-летний Вейерштрасс получил звание школьного учителя и поступил на вакантное место в прогимназии (неполной гимназии) небольшого городка Дейч-Кроне в Западной Пруссии. Там он работал 6 лет. Учебная нагрузка доходила до 30 часов в неделю, так как, кроме математики и физики, Вейерштрассу пришлось вести уроки по ботанике, географии, истории, немецкому языку. Ему предложили вести занятия по гимнастике, в связи с чем он совершил кратковременную поездку в Берлин на курсы гимнастики. Зарплата была низкой. Перед поездкой Вейерштрасса в Берлин расстроилась его помолвка с одной девушкой из-за того, что она увлеклась другим юношей. В библиотеке прогимназии не было никакой научной математической литературы. В Дейч-Кроне Вейерштрасс написал две математические работы. Одна из них – «Замечания об аналитических факториалах» – была опубликована в годичном отчете прогимназии за 1842 – 1843 учебный год, но вряд ли кто-нибудь из математиков ее заметил.

Осенью 1848 г. Вейерштрасс начал работать в гимназии города Браунсберг в Восточной Пруссии, в 63 км от Кёнигсберга. Эта гимназия была основана в 1565 г. Теперь здесь в библиотеке была и научная математическая литература. В этой гимназии Вейерштрасс проработал 8 лет. Учебная нагрузка была большой, научными исследованиями приходилось заниматься по ночам. В приложении к отчету Браунсбургской гимназии за 1848–1849 учебный год была опубликована небольшая работа Вейерштрасс «Введение в теорию абелевых интегралов», не замеченная никем из математиков. Из-за больших умственных перегрузок 35-летний Вейерштрасс заболел в 1850 г.: появились длившиеся часами головные боли с головокружением и тошнотой. Врачи называли это «утомлением мозга». Из-за этого он два года не мог заниматься научными исследованиями.

В 1853 г. в Браунсберге он написал очень важную работу «К теории абелевых функций». Абелевы функции – это обращения абелевых интегралов. Он отослал ее в крупный математический журнал – журнал Крелле, где её опубликовали в 1854 г. Здесь Вейерштрасс, в частности, решил проблему обращения гиперэллиптических интегралов. Эта его работа вызвала сенсацию в математическом мире. Математики недоумевали: как это школьный учитель занимался столь сложными вопросами и ничего до этого не публиковал в математических журналах. Как видим, Вейерштрасс начал публиковаться поздно, ему уже было 39 лет. Первым обратил внимание на вышедшую в журнале статью Вейерштрасса доцент Берлинского университета К. Борхардт (1817–1880), ученик и друг К. Г. Я. Якоби (1804–1851), работавшего в Кёнигсбергском университете. Борхардт приехал в Браунсберг, чтобы лично познакомиться с Вейерштрассом, позже они стали большими друзьями. Обратили внимание на работу Вейерштрасса и математики Кёнигсбергского университета, особенно профессор Ф. Ю. Ришело (1808–1875). Работа Вейерштрасс была признана лучшей после работ Якоби в области эллиптических функций. За нее Кёнигсбергский университет в 1854 г. присудил Вейерштрассу степень доктора honoris causa, т. е. почетного доктора без защиты диссертации.

Встал вопрос о предоставлении Вейерштрассу подходящего места работы в высшем учебном заведении в Берлине. Крелле, издатель математического журнала, обращался по этому поводу в министерство просвещения Пруссии (оно называлось министерством культуры). Обращался и сам Вейерштрасс, ему дали годовой отпуск

для научной работы и сделали старшим учителем. Очень обстоятельное ходатайство в министерство по поводу Вейерштрасса написал один из ведущих в то время математиков П. Г. Дирихле (1805–1859).

Во втором номере журнала Крелле за 1856 год была опубликована большая работа Вейерштрасса «Теория абелевых функций», представляющая развернутое изложение предыдущей статьи. Она была опубликована не полностью, часть работы Вейерштрасс забрал обратно, чтобы уступить место публикации работы Римана с тем же названием. Позже он излагал свои результаты по абелевым функциям в своих лекциях в более полном виде.

Выдающийся немецкий естествоиспытатель, географ и путешественник А. фон Гумбольдт (1769–1859) обратился к директору Промышленного института в Берлине, а тот – к министру торговли, и Вейерштрасс в июне 1856 г. был зачислен в этот институт. Когда в сентябре 1856 г. профессор математики Берлинского университета, член Берлинской АН Э. Э. Куммер (1810–1893) был вместе с Вейерштрассом на собрании естествоиспытателей в Вене, австрийский министр просвещения предложил Вейерштрассу должность профессора с высоким окладом в любом австрийском университете, но тот колебался. Вернувшись из Вены, Куммер обратился в прусское министерство просвещения с просьбой учредить в Берлинском университете для Вейерштрасса дополнительное место экстраординарного профессора. Через три дня Вейерштрассу эта должность с соответствующим окладом была предоставлена.

Берлинский университет был основан в 1810 г. В середине XIX в. в Берлине было около 400 тысяч жителей. Вейерштрасс поселился в Берлине со своими двумя сестрами, которые полностью взяли на себя заботу о Вейерштрассе. Потом он взял к себе и своего овдовевшего отца, который жил у него 10 лет до смерти в 1869 г. Они несколько раз меняли квартиру.

Ко времени поступления Вейерштрасса в Берлинский университет там работали выдающиеся математики: Э .Э. Куммер (1810–1893), работавший в области теории алгебраических чисел и геометрии; Л. Кронекер (1823–1891) – крупный специалист в области алгебры и теории чисел; Я Штейнер (1796–1863), сделавший крупный вклад в развитие проективной геометрии синтетическим методом. Куммер, работавший до того в университете г. Бреслау (ныне Вроцлав в Польше), занял в Берлинском университете место Дирихле, перешедшего в Гёттингенский университет

на место К. Ф. Гаусса, умершего в 1855 г. Во время поездки в Берлин в 1859 г. Риман познакомился с Вейерштрассом (см. выше с. 22).

В 1861 г. Вейерштрасса избрали членом Баварской академии наук.

До 1861 г. у Вейерштрасса в Берлине была очень напряженная жизнь: в неделю 12 часов лекций в Промышленном институте и 4 часа лекций в Берлинском университете, научная работа и подготовка новых лекций. Уже в 1854–1861 гг. он опубликовал шесть своих научных работ. В результате в декабре 1861 г. Вейерштрасс во время лекции в университете почувствовал сильное головокружение и упал в обморок. Он перестал ходить в Промышленный институт, хотя числился там до 1864 г. В университете он в 1864 г. был утвержден ординарным профессором. В этой должности Вейерштрасс работал в Берлинском университете 40 лет – до конца жизни, хотя лекции читал только до 1888 г. До этого же года он и публиковался. Из списка его математических работ (см., например, в [132, с. 261–265]) видно, что с 1854 г. он опубликовал в различных журналах три десятка работ, а еще примерно столько же в месячных отчетах Берлинской АН. Все его научные работы составили первые три тома его «Математических трудов», а остальные четыре тома занимают его лекции в Берлинском университете, он их до этого не публиковал.

После случая с обмороком Вейерштрасс с 1862 г. никогда не читал лекции, стоя у доски. Он сидя диктовал лекции студентам, а его ассистент из числа лучших студентов писал мелом на доске формулы. Чтение лекций в университете Вейерштрасс начал в 1856 г. с изложения избранных глав математической физики, но вскоре обнаружил нестрогости изложения во всех опубликованных до того работах, которые он использовал при подготовке лекций. Сразу устранить эти недостатки не удавалось, поэтому он решил отложить чтение этих лекций и вернулся к ним только в 1888 г. А прежде всего он и решил логически строго обосновать математический анализ, не опираясь ни на какие интуитивные представления. Благодаря достигнутым им результатам Вейерштрасс является главным из основоположников так называемой «арифметизации» анализа, которую начали проводить в первой половине XIX в. Гаусс, Больцано, Коши и Абель (см. очерки об этих математиках в нашей книге [289]). О результатах Вейерштрасса в этом вопросе мы будем говорить ниже, а пока что укажем его курсы лекций, в которых он арифметизировал анализ: «Общие теоремы, относящиеся к представлению аналитических функций сходящимися

рядами» (летний семестр 1857 г.) и курс «Введение в анализ» (зимний семестр 1859-1860 учебного года).

В 1834 г. Якоби в Кёнигсбергском университете впервые организовал физико-математический семинар для работы с наиболее способными студентами. По этому образцу в 1864 г. Куммер и Вейерштрасс организовали математический семинар в Берлинском университете. Многие из участников этого семинара стали потом профессорами вузов.

После избрания Вейерштрасса ординарным профессором ему полагалось руководить диссертантами. У него было 27 диссертантов, из них затем 18 работали в вузах. Вейерштрасс пользовался большим уважением своих коллег и студентов. Даже Штейнер, читавший курс синтетической геометрии и успевший перессориться со всеми коллегами, относился к Вейерштрассу благожелательно. Перед смертью в 1863 г. он попросил Вейерштрасса читать курс синтетической геометрии. Вейерштрасс читал этот курс шесть раз до 1873 г., но не потому, что любил этот предмет, а как дань уважения к Штейнеру. В 1867 г. Вейерштрасс прочел курс по теории детерминантов и ее приложениям.

Авторитет Вейерштрасса растет и за пределами Германии: в 1866 г. его избирают членом-корреспондентом Петербургской АН, а в 1868 г. – Парижской АН. В 1868 г. в месячных отчетах Берлинской АН появилась очень важная работа Вейерштрасса «К теории билинейных и квадратичных форм», в которой он ввел элементарные делители матриц и до Жордана изучил блочно-диагональный вид матриц.

Вейерштрасс в докладе, прочитанном в 1870 г. в Берлинской АН, подверг критике использованный Риманом «принцип Дирихле», обратив внимание на необходимость усиления строгости в математике (см. выше с. 20). В отличие от Римана (1826–1866), творческая деятельность которого продолжалась менее 15 лет Вейерштрасс не оставлял в своих работах и лекциях никаких проблем, стараясь все разработать и логически строго доказать.

В 1870 г. Вейерштрасс начал проводить частные занятия по материалам своих лекций с талантливой 20-летней ученицей из России – Софьей Васильевной Ковалевской (1850–1891), так как ни в российских, ни в Берлинском университетах слушать лекции женщинам тогда не разрешалось. Более трех лет этих занятий и

общение, переросшее в большую дружбу, привели к получению С. В. Ковалевской в 1873 г. докторской степени в Гёттингенском университете и в дальнейшем в устройстве в 1884 г. на работу в должности профессора математики в Стокгольмском университете. Многочисленные письма Вейерштрасса к Ковалевской дают ценные сведения о нем. Подробнее о ней см. ниже в пункте 3 нашего очерка.

В 1874 г. у Вейерштрасса появился новый способный ученик из Швеции Гёста Миттаг-Леффлер (1846–1927), будущий профессор Стокгольмского университета. Когда после окончания Упсальского университета он приехал совершенствовать свои знания в Париж к выдающемуся математику Ш. Эрмиту, тот ему сказал: «Почему Вы не поехали в Берлин к Вейерштрассу? Он вне сравнения, он первый среди нас всех» [291, с. 12]. И Миттаг-Лиффлер поехал слушать лекции Вейерштрасса. В дальнейшем Миттаг-Леффлер и Вейерштрасс помогли С. В. Ковалевской в устройстве на работу в Стокгольмский университет.

Лекции Вейерштрасса к тому времени уже получили широкую известность в Европе, хотя он их и не публиковал до включения в его «Математические труды». Записи студентами его лекций передавались и в другие университеты. Кроме вводных, лекции Вейерштрасса не были легкими для студентов, особенно лекции по абелевым интегралам, эллиптическим и абелевым функциям, так как он излагал здесь многое из своих исследований. Поэтому к концу семестра количество его слушателей обычно сильно уменьшалось. Так, например, в 1869 г. на его лекциях по абелевым интегралам из 107 слушателей к концу осталось только семь [132, с. 90].

В 1873 г. Вейерштрасса на один год избирают ректором Берлинского университета. При вступлении в эту должность он произнес очень содержательную речь. Ректоров избирали ежегодно все ординарные профессора университета из своей среды. Ректор был представителем университета во всех внешних организациях и председателем выборного университетского сената (совета).

В 1875 г. Вейерштрасс получил особый правительственный орден «За заслуги», которым до него из математиков были награждены Гаусс, Якоби и Дирихле.

В 1875 г. в работе об интегрировании системы линейных уравнений Вейерштрасс использовал результаты своей работы «К теории билинейных и квадратичных форм». Летом того же года он жил в поместье Карла Вильгельма Борхардта (1817–1880), своего друга, профессора Берлинского университета, члена

Берлинской АН с 1856 г. После смерти Крелле Борхардт с 1855 г. редактировал «Журнал чистой и прикладной математики».

В 1875–1876 учебном году Вейерштрасс читал лекции по приложениям эллиптических функций к геометрии и механике, вариационному исчислению, теории абелевых функций, введению в теорию аналитических функций. В 1876 г. вышла его большая статья «К теории однозначных аналитических функций». В том же году опубликовал статью о периодических функциях нескольких переменных. В 1879 г. выходит его статья об аналитических функциях многих переменных, а в 1880 г. – большая статья «К учению о функциях».

В 1880 г. умер Борхардт. Вейерштрасс и Кронекер взяли на себя редактирование журнала Борхардта. Вейерштрасс, занимавшийся тогда подготовкой к печати собрания трудов Штейнера, взял на себя и подготовку к печати собрания трудов Якоби, которой занимался Борхардт. На два месяца в Берлин в 1880 г. приезжала С. В. Ковалевская. В том же года Вейерштрасс возобновил свои прежние исследования по линейным дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами.

В 1881 г. Вейерштрасс был избран членом Лондонского королевского общества, т. е. Академии наук.

В 1882 г. Вейерштрасс по-новому прочел лекции по гиперэллиптическом функциям. В это время ему уже было трудно ходить непрерывно более получаса из-за болезни ног (расширение вен). В 1882 г. Франция наградила Вейерштрасса орденом Почетного легиона.

К области нового направления в алгебре относится работа Вейерштрасса 1884 г. о комплексных единицах, в которой он ввел понятие прямой суммы алгебр.

С конца 70-х годов XIX в. у Вейерштрасса начали осложняться взаимоотношения с Л. Кронекером, считавшим, что в математике истинным является только то, что может быть последовательно построенным, исходя из понятия целого числа. Кронекер был очень тщеславен и обидчив. Он выступил и против принципов обоснования Вейерштрассом теории аналитических функций, возражал против печатания академией собрания трудов Борхардта.

В 1885 г. Вейерштрасс опубликовал доказательство своей теоремы о приближении непрерывной функции многочленами. В 1885 г. была торжественно

отмечено 70-летие Вейерштрасса. Миттаг-Леффлер в своем журнале *Acta mathematica*, который с 1882 г. начал издавать в Швеции, поместил к юбилею Вейерштрасса хорошую статью о нем, а также в переводе на французский язык несколько работ Вейерштрасса под общим названием «К теории эллиптических функций». С тех пор этот журнал получил широкое международное признание.

Зиму и весну 1886 г. Вейерштрасс провел на лечении в Швейцарии, куда приехал со своими двумя сестрами и приемным сыном. В летнем семестре 1886 г. прочел курс лекций «Избранные главы теории функций». Это был последний прочитанный им курс лекций, так как с 1887 г. врачи не разрешили ему читать лекции и заниматься научной работой. Но Вейерштрасс в последние годы жизни занимался подготовкой к печати собрания своих трудов. С 1889 г. у него усилилась болезнь ног, ему стало очень трудно ходить, а в последние три года жизни он передвигался по квартире только сидя в кресле на колесиках.

К большому огорчению Вейерштрасса в 1891 г. неожиданно умерла С. В. Ковалевская на 42-м году жизни. В том же году умер Кронекер в возрасте 68 лет. Вейерштрасс устроил на место Кронекера в Берлинском университете своего ученика Ф. Г. Фробениуса (1849–1917), работавшего до этого в Политехническом университете в Цюрихе. Было принято предложение Вейерштрасса о назначении своим помощником в университете бывшего своего ученика Г. А. Шварца (1842–1921) из Гёттингенского университета, где он работал с 1875 г.

Берлинская АН создала комиссию по подготовке к печати трудов Вейерштрасса, в которую, кроме автора, вошли Фробениус, Шварц и др. Было издано собрание «Математические труды» Вейерштрасса в семи томах. В первые три тома вошли все математические статьи Вейерштрасса, а еще четыре тома составили его лекции. Первые два тома вышли при жизни Вейерштрасса (в 1894 и 1895 гг.), а седьмой том – в 1927 г. Планировалось издать еще два тома лекций Вейерштрасса, но они не были изданы.

У Вейерштрасса было много учеников, внесших важный вклад в различные области математики: Г. Кантор, С. В. Ковалевская, Ф. Фробениус, Г. А. Шварц, Г. Миттаг-Леффлер, Л. Фукс, О. Штольц, Л. Кёнигсбергер, Ф. Г. Шоттки, А. М. Шёнфлис, В. Киллинг, К. Рунге, М. А. Тихомандрицкий и др.

Умер Вейерштрасс в 1897 г. от воспаления легких после гриппа. Имя Вейерштрасса носят кратер на обратной стороне Луны и Математический институт в Берлине.

2. О математическом творчестве Вейерштрасса.

Выдающийся русский математик Н. Н. Лизин (1883–1927) писал о Вейерштрассе: «Относительно математической личности Вейерштрасса большинство современных математиков, по-видимому, приходят к согласию в том, что ее центром и смыслом было подведение числовой основы под всю математику, «арифметизация математики» и «критический пересмотр различных теорий». (Н. Н. Лузин. Собр. соч. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – С. 307.)

Рассмотрим сначала вклад Карла Вейерштрасса в развитие **математического анализа**, где ему принадлежит решающая роль во второй половине XIX в. Его называют «отцом современного анализа».

Первые десятилетия XIX в. явились переломным сдвигом в обосновании и развитии математического анализа как современной науки в творчестве главным образом О. Л. Коши, Б. Больцано и Н. Х. Абеля (см. об этих математиках очерки в нашей книге [289]). Были заложены основы теории пределов, непрерывности, интегрируемости. Но многие важные понятия анализа в то время не были введены, а некоторые результаты требовали более строгого обоснования.

Как известно, в основе математического анализа лежат теория действиетльных чисел и теория пределов. С помощью понятия предела Коши обосновал, хотя и не полно, а иногда и с ошибками, теорию определенного интеграла и сходимости рядов. В истории развития математики действительные числа вводились по-разному: в виде сечений совокупности рациональных чисел (Евдокс в IV в. до н. э.), в виде цепных дробей (О. Хайям в XI в.), в виде десятичных дробей (С. Стевин в XVI в.). Но требовалось современное изложение теории действительных чисел.

Чешский математик Бернард Больцано в одной из рукописей в 30-х гг XIX в. предложил набросок теории действительных чисел, но эта рукопись была опубликована только в 1897 г. Его теория была сходна с той, которую дал Георг Кантор в 1872 г. на основе фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Первой ставшей широко известной в XIX в. была теория действительных

чисел, которую предложил в 1860 г. Карл Вейерштрасс в своем курсе лекций «Введение в анализ» и позже как введение в теорию аналитических функций. При жизни он не публиковал своих лекций, а вводные курсы, содержащие теорию действительных чисел, не включил и в собрание своих трудов, считая этот материал не вполне доработанным. Эти лекции в 1860 г. записал его ученик Г. А. Шварц (они были обнаружены позже), а некоторые другие слушатели или просто опубликовали эти лекции или привели их в своих работы и книги. В частности, Э. Коссак в 1872 г. опубликовал «Элементы арифметики по лекциям Вейерштрасса».

Кратко скажем о том, как Вейерштрасс вводил действительные числа. Математики XIX в. до Больцано и Вейерштрасса, как и многие другие до них, считали, что иррациональные число a – это предел последовательности рациональных чисел a_n, т. е. $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Это верно, но указанное равенство не может служить определением действительного числа, так как по определению предела нужно брать разности $a_n - a$, а это можно делать только после того, как введены действительные числа и операции над ними. Указанное выше равенство есть не определение действительного числа, а теорема. На этот факт долго не обращали внимание, но в XIX в. стал устанавливаться повышенный уровень строгости.

Вейерштрасс исходит из понятия натурального числа n как совокупности единиц. Рациональным числом называется отношение $\frac{m}{n}$ целых чисел, где $n \neq 0$. Формулируются отношения сравнения рациональных чисел, по обычным правилам вводятся операции сложения и умножения рациональных чисел, проверяются свойства операций (коммутативность и ассоциативность, дистрибутивность относительно сложения). Вычитание и деление вводятся как операции, обратные, соответственно, сложению и умножению.

Приступая к определению действительного положительного числа, Вейерштрасс сначала делит единицу на n равных частей $\frac{1}{n}$, которые называет точными частями единицы. Точная часть от точной части единицы является точной частью единицы, например, $\frac{1}{nm}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$ и т. п. Действительное число по Вейерштрассу – это агрегат

$$\left\{a_0, \frac{a_1}{g_1}, \frac{a_2}{g_2}, \ldots, \frac{a_n}{g_n}, \ldots\right\},$$

где $a_i (i = 0,1,2,\ldots)$ – неотрицательные целые числа, $g_i (i = 1,2,\ldots)$ – натуральные числа. Члены $\frac{a_i}{g_i}$ – рациональные числа, кратные точным частям единиц. При этом последовательность $\left\{\frac{a_i}{g_i}\right\}$ членов должны быть невозрастающей и удовлетворять условию: существует натуральное число M такое, что сумма любого конечного числа членов агрегата не превосходит M. Агрегат может состоять из конечного или бесконечного числа членов. Например, агрегат $\left\{4, \frac{1}{2}, \frac{2}{7}\right\}$ представляет собой число $4 + \frac{1}{2} + \frac{2}{7} = 4\frac{11}{14}$. Для агрегатов вводятся их рациональные приближения α_n, β_n по недостатку и по избытку. При определении операций над действительными числами как агрегатами Вейерштрасс действует только с их рациональными приближениями. Например, при определении суммы $a + b$ действительных чисел нужно взять для a приближения α_{1n}, β_{1n} по недостатку и избытку, а для b – приближения α_{2n}, β_{2n} $(n = 1,2,\ldots)$. По условию множество $\alpha_{1n} + \alpha_{2n}$ рациональных чисел ограничено сверху числом $2M$, поэтому имеет точную верхнюю грань, она и называется суммой $a + b$ действительных чисел a и b.

Агрегат с бесконечным числом членов Вейерштрасс называет рядом, а после введения операций над действительными числами и понятия предела числовой последовательности можно говорить о сходимости ряда и его сумме. В качестве примера агрегата, не являющегося действительным числом, Вейерштрасс приводит пример расходящегося агрегата $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, который представляет собой гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$. На примере числа $\sqrt{2}$ Вейерштрасс показывает своим слушателям, что существуют иррациональные числа. Он доказывает иррациональность $\sqrt{2}$ рассуждением от противного, а затем иллюстрирует с помощью приближений.

Доказывать свойства операций над действительными числами в столь общем виде было бы затруднительно, поэтому Вейерштрасс переходит к построению

действительных чисел в виде десятичных дробей. Теперь у него действительное число – это агрегат $\left\{a_0, \frac{a_1}{10}, \frac{a_2}{10^2}, \ldots, \frac{a_n}{10^n}, \ldots\right\}$, представляющий десятичную дробь $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ с конечным или бесконечным числом десятичных знаков после запятой. Рассуждения проводятся по той же схеме, что и выше, но теперь удобнее как вид членов агрегата, так и приближений его по недостатку и избытку. Из десятичных дробей только конечные и периодические представляют собой рациональные числа.

Построенную Вейерштрассом теорию действительных чисел как десятичных дробей вскоре стали приводить в некоторых учебниках для университетов. Она приводится и в настоящее время в школьных учебниках, хотя и не строго. Детально ознакомиться с теорией действительных (вещественных) чисел в виде десятичных дробей можно, например, по учебнику: Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1979. – Гл. 2.

Отметим еще, что через несколько лет после Вейерштрасса в начале 70-х гг. XIX в. привели свои теории действительных чисел независимо друг от друга и по-разному французский математик Ш. Мерэ и немецкие математики Р. Дедекинд и Г. Кантор.

Благодаря Вейерштрассу в математику прочно вошли понятия точных (верхней и нижней) граней и теорема их существования у ограниченного множества действительных чисел. Определения точных граней имеется в одной из рукописей Гаусса 1799 г. Вейерштрасс сформулировала эти понятия в 1841 г. и затем использовал в своих лекциях, начиная с 1856 г. Эти же понятия и теорема их существования были приведены в статье Б. Больцано «Чисто аналитическое доказательство…», опубликованной в 1817 г. и посвященной доказательству теоремы об обращении в нуль непрерывной на отрезке функции, имеющей на концах отрезка значения разных знаков [23, с. 27–28].

Понятие предельной точки множества действительных чисел и теорема существования предельной точки у всякого ограниченного бесконечного числового множества была переоткрыта Вейерштрассом лет через 30 после Больцано. Она называется теоремой Больцано-Вейерштрасса. Вейерштрассу принадлежит теорема существования предела монотонной ограниченной сверху (снизу) числовой последовательности.

Вейерштрасс сыграл важную роль в современном определении понятий предела и непрерывности функции. Благодаря его лекциям эти определения стали общепринятыми. Определение предела функции по Вейерштрассу было приведено в книге его ученика О. Штольца «Лекции по общей арифметике» (1885): «Число L есть предел функции $f(x)$ в $x = x_0$, если для заданного сколь угодно малого ε можно найти такое число δ, что для всех значений x,отличающихся от x_0 меньше чем на δ, значение $f(x)$ будет отличаться от L меньше чем на ε» [144, с. 195]. Для того, чтобы это определение стало вполне современным, нужно еще потребовать условие $x \neq x_0$. Вейерштрасс записывает это также в виде $\lim\limits_{x=x_0} f(x) = L$, а мы пишем $x \to x_0$ под знаком предела. Здесь x_0 и L – числа, x_0 – предельная точка области определения функции $f(x)$. Сейчас в определении предела вместо записи словами принято писать неравенства $0 < |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - L| < \varepsilon$. Говорят также, что здесь проколотая δ-окрестность точки x_0 отображается в ε-окрестность точки L. Отметим, что используемый ныне знак для абсолютной величины чисел и функций был введен Вейерштрассом еще в 1841 г., но был принят далеко не сразу, его стали систематически применять в XX в., а до того, в основном, обозначали по-разному или выражали словами. В современных курсах математического анализа даются аналогичные определения предела функции и в случаях предельных точек вида $+\infty$, $-\infty$, ∞, а также бесконечно больших функций. В случае, например, предельной точки $+\infty$ ее δ-окрестность изображается неравенством $x > \delta$, при этом вместо δ иногда используют другие буквы. В честности, последовательность есть функция натурального аргумента: $f(n) = x_n$. Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ имеет предельную точку $+\infty$, окрестность которой тогда записывают в виде неравенства $n > N$. Все такие определения с использованием букв ε, δ (возможно с другим обозначением вместо δ) и основанные на них вычисления и доказательства называют рассуждениями «на языке $\varepsilon - \delta$», или «на языке неравенств (окрестности)», или эпсилонтикой. То же касается и определения непрерывности функции в точке.

Приведем определение непрерывности функции, которое дал Вейерштрасс в своих лекциях по дифференциальному исчислению, прочитанных в 1861 г. в Промышленном институте в Берлине. Их записал его ученик Г. А. Шварц, а

опубликовал П. Дюгак только в 1972 г. Там говорится: «Если $f(x)$ есть функция x и x – определенное значение, то при переходе x в $x+h$ функция переменится и будет $f(x+h)$, разность $f(x+h)-f(x)$ называют изменением, которое получает функция в силу того, что аргумент переходит от x к $x+h$. Если возможно определить для h такую границу δ, что для *всех* значений h, по абсолютному значению еще меньших, чем δ, $f(x+h)-f(x)$ становится меньше, чем какая-нибудь сколь угодно малая величина ε, то говорят, что бесконечно малому изменению аргумента соответствуют бесконечно малые изменения функции $f(x)$. [..] то говорят, что она – *непрерывная функция* аргумента или что она непрерывно изменяется вместе со своим аргументом» [3, с.189].

В [289, с.70–71] в очерке о Коши мы уже приводили определения предела переменной и непрерывности функции (на промежутке), которые дал Коши в своем лекционном курсе «Алгебраический анализ» (1821) для слушателей Политехнической школы в Париже. Определение Коши предела переменной имеет кинематический вид: «Если значения, последовательно приписываемые одной и той же переменной, неограниченно приближаются к фиксированному значению таким образом, чтобы в конце концов отличаться от него сколь угодно мало, то последнее называют *пределом* всех остальных» [3, с.179]. Это определение вполне в духе математики XVIII в., оно нечеткое и весьма общее. Судя по дальнейшим применениям, понятие переменной у Коши может означать и числовую последовательность и функцию, аргумент которой может стремиться как к конечному значению, так и к $+\infty$, $-\infty$, ∞, о чем мы говорили выше.

Коши дает определение непрерывности функции $f(x)$ не в точке, а на промежутке, оно состоит в том, что для любого x из этого промежутка бесконечно малому приращению α этого аргумента x отвечает бесконечно малое приращение $f(x+\alpha)-f(x)$ функции $f(x)$.

Как видим, в определениях Коши предела и непрерывности нет никакой эпсилонтики. Это связано главным образом с тем, что слабая математическая подготовка поступающих в Политехническую школу сильно затрудняла бы им воспринимать материал, связанный с эпсилонтикой. Лекции Коши для большинства его слушателей были и так очень трудными.

Может показаться очень странным тот факт, что в современных курсах математического анализа определение предела функции «на языке $\varepsilon-\delta$» называют определением по Коши, а не по Вейерштрассу. Этому способствовало то, что А. Лебег в своих «Лекциях по интегрированию и отысканию примитивных» (1904) приписал Коши определение Вейерштрасса непрерывности функции «на языке $\varepsilon-\delta$» (см. об этом примечание А. П. Юшкевича в [130, с. 69]). Тем не менее утверждать, что Коши не пользовался эпсилонтикой было бы неправильно. Он первым использовал ее несколько раз в своих лекционных курсах.

Так, в «Алгебраическом анализе» (1821) Коши при доказательстве одной теоремы (в части 2, §2) использует определение предела $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=k$ «на языке $\varepsilon-h$», рассматривая ε-окрестность $(k-\varepsilon,k+\varepsilon)$ числа k и h-окрестность $+\infty$ в виде $x>h$.

Коши в лекции 38 своего пособия «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (1823) доказывает признак Д'Аламбера (в предельной форме) сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\rho_n$, используя определение предела $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\rho_{n+1}}{\rho_n}=\lambda$ «на языке $\varepsilon-\delta$» с числом m вместо δ (для последовательности аргументом является n, а окрестность символа $+\infty$ имеет вид $n>m$).

Там же в лекции 7, где Коши доказывает, хотя и не строго, теорему Лагранжа о конечных приращениях, он даже использует вместе буквы ε и δ в доказательстве для записи определения производной как предела $\lim\limits_{i\to 0}\dfrac{f(x+i)-f(x)}{i}=f'(x)$. Таким образом, хотя Коши и не привел для произвольной функции $f(x)$ определения предела $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ в случае конечного x_0 с помощью эпсилонтики, но применял ее в частных случаях конечного и бесконечного x_0, а также в случае предела последовательности.

Использование эпсилонтики в определениях и доказательствах явилось важнейшим шагом в реформе («арифметизация») математического анализа. Это позволило перевести на точный язык неравенств и окрестностей кинематическое выражение «переменная величина неограниченно приближается», строго проводить доказательства. Но часто строгость приходила не сразу. В определении предела и

непрерывности функции число δ зависит от ε и x_0. Иногда бывает важным, чтобы при переменной x_0 существовало число δ, зависящее только от ε, но не от x_0. Коши еще не осознал этого.

Если функция $f(x)$ определена на промежутке I и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, зависящее от ε, но не от значений аргумента функции, такое, что, для любых x, x' в I из неравенства $|x - x'| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, то функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на промежутке I .Это понятие возникло, в частности, из-за попыток математиков исправить некоторые нестрогости в лекционных курсах Коши. Одна из них – в его доказательстве теоремы Лагранжа о конечных приращениях. В настоящее время эта теорема очень просто доказывается с помощью теоремы Ролля. Но у Коши не было еще теоремы Ролля для дифференцируемой функции, ее формулировку впервые дал Вейерштрасс, она без доказательства приведена в [3, с. 192].

Коши доказывает теорему Лагранжа сложным способом. Сначала он доказывает вспомогательную теорему, предполагая, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, X]$ и имеет на нем производную $f'(x)$ в каждой точке. В этом доказательстве он привел определение производной $f'(x)$ «на языке $\varepsilon - \delta$». Коши не располагал понятием равномерной непрерывности. Он не обращает внимание на то, зависит ли число δ в определении $f'(x)$ от изменения аргумента x или нет, и действует так, как если бы этой зависимости не было. Если бы δ могло стремиться к нулю при изменении x, то Коши не смог бы разбить отрезком $[x_0, X]$ на конечное число частей длины, меньшей, чем δ, каждая из которых отображалась бы в заранее заданную ε-окрестность производной $f'(x)$ при $x \in [x_0, X]$. Короче говоря, Коши в его доказательстве требовалась равномерная непрерывность $f'(x)$ на $[x_0, X]$, тогда для $f'(x)$ здесь существовало бы число δ, не зависящее от x.

Больцано попытался исправить неточность в доказательстве Коши, теоремы Лагранжа, но его попытка оказалась недостаточной. Наконец, немецкий математик **Эдуард Гейне (1821–1881)** в статье 1870 г. ввел понятие равномерной непрерывности функции, а в статье 1872 г. доказал теорему: всякая функция $f(x)$, непрерывна на отрезке $[a,b]$, равномерно непрерывна на нем [8, с. 144–145]. В современных

учебниках эту теорему называют теоремой Кантора, который, по-видимому, высказал ее.

Понятие равномерной непрерывности функции позволило строго доказать существование определенного интеграла для непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции. Коши это делал нестрого, не владея понятием равномерной непрерывности функции. В теории непрерывных функций Вейерштрасс доказал теоремы:

об ограниченности непрерывной на отрезке функции;

о достижении непрерывной на отрезке функции своих точных граней;

о промежуточных значениях непрерывной функции.

Эти результаты он привел в своих лекциях. В доказательстве этих теорем его опередил Больцано в своей работе «Учение о функциях», о которой мы подробно писали в [289, с. 53–60] в очерке о Больцано. Эта главная математическая работа Больцано была написано около 1830 г., но пролежала в Венской библиотеке среди рукописей фактически неизвестной математиками почти сто лет до ее опубликования в Праге в 1930 г. В первой части этой работы Больцано приводит широко разработанную им теорию непрерывных функций. Определение непрерывной функции в точке, а также односторонней непрерывности и доказательства теорем о непрерывных функциях он дает «на языке $\varepsilon-\delta$» (с другими буквами вместо ε и δ). В частности, там он первым из математиков построил пример непрерывной на отрезке функции, не имеющей производной ни в одной точке отрезка. Но доказал он ее недифференцируемость только на всюду плотном множестве точек отрезка.

Математики не сразу разобрались в том, как связана дифференцируемость функции с ее непрерывностью. Легко доказывается, что из дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0 (т. е. из существования конечной производной $f'(x_0)$, а значит, и касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0) следует ее непрерывность в точке x_0. Но вопрос в том, следует ли из непрерывности функции ее дифференцируемость, оказался сложным. Известно было, что функция, непрерывная в точке, может быть не дифференцируема в этой точке. Например, функция $f(x)=|x|$ непрерывна в точке $x_0=0$, но не имеет производной (а значит, и касательной) в этой точке. Функция $f(x)=\sqrt[3]{x}$ непрерывна в точке $x_0=0$, но ее производная в этой точке бесконечна, касательная в этой точке вертикальна.

До XIX в. математики не ставили вопрос о существовании производных, так как при дифференцировании имели дело с аналитическими функциями. Ж. Л. Лагранж (1736–1816) в своих ранних работах определяет производную, пользуясь понятием предела. Но в своей монографии «Теория аналитических функций» (1797) он не пользуется понятием предела, считая его недостаточно обоснованным. Здесь Лагранж ограничивается рассмотрением аналитических функций действительной переменной, которые задает степенными рядами формально, без понятия сходимости, а производные функций определяет через коэффициенты степенного ряда.

Французский физик и математик А. М. Ампер (1775–1836), один из основоположников электродинамики, понимая, что такой подход Лагранжа является шагом назад, не ограничивается каким-либо классом функций. В своей работе о ряде Тейлора, опубликованной в 1806 г., он пользуется определением производной как предела $\lim\limits_{i\to 0}\dfrac{f(x+i)-f(x)}{i}=f'(x)$, выводит нестрого формулу Лагранжа о конечных приращениях и ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, приведенные в монографии Лагранжа для аналитических функций без использования понятия предела. Существование производных Лагранж фактически постулирует в монографии, а Ампер в своей работе предварительно «доказывает» теорему: всякая функция, заданная на отрезке, имеет на нем производную всюду, за исключением разве лишь конечного числа точек, в которых производная не существует. Современного понятия непрерывности функции тогда еще не существовало, но после его введения ряд математиков даже еще и в 70-х гг. XIX в. (см. [137, с. 208]) без каких бы то ни было на то оснований стали считать, что теорема Ампера верна для непрерывных функций (или кусочно-непрерывных). Пример Больцано непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции тогда не был известен, хотя Дирихле в своих лекциях 1854 г. говорит о возможности построения подобного примера.

Около 1861 г. Б. Риман привел пример функции

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n^2x)}{n^2},$$

которая непрерывна всюду, но, как утверждал он, не имеет производной в бесконечном числе точек на любом интервале. Риман не оставил вычислений по этому поводу. Только в 1918 г. английский математик Г. Х. Харди нашел, что

функция Римана не имеет конечной производной в точках $\xi\pi$, где ξ – иррационально, а также при некотором бесконечном числе рациональных ξ. В 1971 г. Дж. Гервер показал, что функция Римана имеет производную, равную $-\frac{1}{2}$, в точках $\xi\pi$, где ξ – рациональные числа с нечетными числителем и знаменателем, а в других точках она не дифференцируема [137, с. 210–211].

Настоящей сенсацией в математическом мире явился пример К. Вейерштрасса всюду непрерывной и нигде не дифференцируемой функции

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

где $0<a<1$, b – нечетное натуральное число, $ab>1+\frac{3\pi}{2}$. Он доложил о нем Берлинской АН в 1872 г., построил раньше, а опубликовал в 1875 г. Математики были изумлены тем, как геометрическая интуиция смогла их обмануть: ведь в этом примере непрерывная кривая не имеет касательной ни в одной точке! В XIX в. это был самый известный пример такого рода, а о примере Больцано математики тогда не знали. Доказательство недифференцируемости функции Вейерштрасса имеется в учебнике: Чезаро Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. – Одесса: Mathesis, 1914. – Ч. 2. – Приложения. – С. 459–162.

Независимо от Вейерштрасса французский математик Ж. Г. Дарбу (1842–1917) построил пример функции

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sin[(n+1)!x],$$

всюду непрерывной и не имеющей производной ни при каких x. Он доложил о нем и своих результатах на заседании Французского математического общества в 1873 и 1874 гг.

Примеры Вейерштрасса и Дарбу вызвали многочисленные исследования в XIX в. о связи непрерывности и дифференцируемости, разрушившие традиционные представления об этой связи. Операция дифференцирования, казавшаяся до этого простой, иногда оказывалась трудно выясняемой на практике, что видно из примера Римана. Возник вопрос о классах недифференцируемых функций. Особенно большой вклад в разработку этого вопроса внес выдающийся итальянский математик Улис

Дини (1845–1918). Его работы позволили строить целые классы таких «патологических» функций. У Н. Бурбаки читаем «У большинства математиков XIX в. чувство отвращения сменилось состоянием растерянности. «Как интуиция может обмануть нас до такой степени?» – спрашивает себя А. Пуанкаре […]; а Эрмит в знаменитом изречении (не без некоторого юмора, который, по-видимому, дошел не до всех комментаторов) говорит, что он «с ужасом отворачивается от внушающей сожаление язвы непрерывных функций, не имеющих ни в одной точке производной» […]. Поэтому надо было винить грубый и несовершенный характер нашей геометрической интуиции, и вполне понятно, что после этого она с полным основанием была дискредитирована как средство доказательства» [8, с. 26].

В 1931 г. С. Мазуркевич и С. Банах доказали парадоксальный факт: множество непрерывных функций, имеющих производные хоть в каких-нибудь точках, пренебрежимо мало по сравнению с множеством непрерывных функций, не имеющих производной ни в одной точке [137, с. 222]. Ситуация с открытием непрерывных функций без производных напоминает ту, что с иррациональными числами: сначала о них н знали, а потом оказалось, что по запасу иррациональные числа преобладают над рациональными.

Вейерштрасс первым привел определение дифференциала функции многих переменных как главной линейной части ее приращения. До него, введя определение частных производных, давали определение дифференциала, например, для функции двух переменных по формуле

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy\,.$$

Определение Вейерштрасса в этом случае имеет вид: «Если $f(x+dx,y+dy)-f(x,y)$ можно так разложить на две части $pdx+qdy$ и $p'dx+q'dy$, что p и q совершенно не зависят от dx и dy, а p' и q' являются бесконечно малыми при бесконечно малых dx и dy, то первую часть $pdx+qdy$ будем называть полным дифференциалом». Запись приращения функции двух переменных в таком виде соответствует современному определению ее дифференцируемости. При жизни Вейерштрасс не публиковал своих лекций. Приведенное выше определение привел ученик Вейерштрасса О. Штольц в своем учебнике «Основы дифференциального и интегрального исчисления» (1893), написанном на основе лекций Вейерштрасса,

которые он слушал и делал записи. Из учебника Штольца это определение дифференциала попало в английские учебники, где его называли дифференциалом по Штольцу.

Вейерштрасс сыграл основную роль в строгом изложении теории функциональных рядов и последовательностей благодаря использованию им понятия равномерной сходимости. У Коши в «Алгебраическом анализе» (1821) была неверная теорема: сумма сходящегося ряда непрерывных функций является непрерывной. Абель заменил ошибочность этой теоремы, приведя в 1826 г. соответствующий пример (см. [3, с. 184], а также [289, с. 103]). Коши в работе 1853 г. ввел понятие равномерной сходимости ряда, которое и сейчас приводится в учебниках математического анализа, и исправил свою ошибку, доказав, что сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций является непрерывной [137, с. 83]. Немного раньше с целью исправить ошибку Коши, ввели иные понятия равномерной сходимости Ф. Зендель (1849) и Дж. Стокс (1848). Но в дальнейшем важным оказалось определение Коши равномерной сходимости ряда. Именно им пользуется Вейерштрасс, сыгравший главную роль в вопросах применения этого понятия. П. Дюгак в статье «Элементы анализа у Карла Вейерштрасса» (1973) пишет, что Вейерштрасс, по-видимому, впервые познакомился с идеей равномерной сходимости рядов и бесконечных произведений, которая впервые встречается в публикации Х. Гудермана в 1838 г. [108, с. 209]. На необходимость равномерной сходимости ряда для возможности его почленного интегрирования обратил внимание Чебышев в 1841 г. Ф. А. Медведев пишет: «Зейдель, Стокс и Коши приступили к изучению равномерной сходимости только по поводу вопроса о непрерывности суммы сходящегося ряда непрерывных функций, и никто из них не связал это понятие с другими задачами анализа. Более того, Коши в 1823 г. (а вслед за ним и Стокс) высказали другую ошибочную теорему, что сходящийся всюду ряд непрерывных функций можно почленно интегрировать […]. Так как вскрыть ее ошибочность оказалось гораздо труднее, то, кажется, никто из математиков до Вейерштрасса не усомнился в ее справедливости, и такие ряды интегрировали почленно, выполняя эту операцию как нечто само собой разумеющееся. Напротив, Вейерштрасс в своих лекциях показал, что равномерная сходимость важна и здесь, благодаря чему это понятие становилось не зависящим от того частного применения, которое ему делали

ранее. Аналогично обстояло дело с почленным дифференцированием ряда» [137, с. 84].

В 1886 г. Вейерштрасс опубликовал свой признак равномерной сходимости ряда: если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, состоящего из действительных или комплексных функций, определенных на множестве E, существует числовой сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такой, что

$$|u_n(x)| \le a_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

то исходный ряд сходятся равномерно и абсолютно на E.

Он же привел и признак равномерной сходимости функциональной последовательности, состоящей из действительных или комплексных функций на множестве E [197, т. 1, с. 615–616].

В 1885 г. Вейерштрасс опубликовал свою очень важную теорему о приближении функций: для любой действительной непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ существует последовательность алгебраических многочленов $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots$, равномерно сходящаяся на $[a,b]$ к функции $f(x)$. В 1935 г. американский математик М. Стоун дал широкое обобщение этой теоремы Вейерштрасса на действительные непрерывные на компакте функции $f(x)$ кольца с топологией равномерной сходимости.

Скажем о вкладе Вейерштрасса в создание **теории аналитических функций**. Благодаря работам Коши, Римана и особенно Вейерштрасса она приобрела черты отдельной математической дисциплины. Иногда пишут, что сам термин «аналитическая функция» ввел Вейерштрасс, но на самом деле его впервые использовал Лагранж в названии своей монографии «Теория аналитических функций» (1797), но формально и при том для функций действительного переменного. Вейерштрасс исходит из определения аналитической функции $f(z)$ для комплексных z в виде сходящегося степенного ряда с его кругом сходимости. Предварительно во вводных лекциях он построил теорию действительных и комплексных чисел, дал определение предела функции и сходимости ряда, поэтому его теория функций построена на строгих основаниях. Главный вклад Вейерштрасса в

теориях аналитических функций можно кратко охарактеризовать словами А. И. Маркушевича: «Вслед за Ньютоном и Лагранжем Вейерштрасс поставил степенной ряд, вернее систему степенных рядов, связанных между собой отношением аналитического продолжения (этого ни у Ньютона, ни у Лагранжа не было), в центре теории аналитических функций, заложил основы теории целых функций, довел до высшей степени совершенства теорию эллиптических функций и увенчал все это здание теорий абелевых функций, являвшейся наиболее впечатляющим достижением анализа в XIX в. Попутно он заложил основы теории аналитических функций многих комплексных переменных» [108, с. 207].

В п. 1 мы уже упоминали ряд результатов Вейерштрасса **в теории аналитических функций**. Теперь, опираясь в основном на [108], скажем о них несколько подробнее. Будучи в Мюнстере в 1839–1841 гг., он, кроме экзаменационной работы написал еще три работы. К сожалению, при его жизни они не были опубликованы. А тем не менее, они содержали ряд результатов Вейерштрасса, важных, в частности, для общей теории аналитических функций. В одной из этих работ он получил разложение аналитической функции в ряд в круговом кольце, т. е. в так называемый ряд Лорана, полученный Лораном на два года позже. Интересным является представление Вейерштрасса комплексного числа z в виде $r\frac{1-\lambda i}{1+\lambda i}$, где $r=|z|$, а λ – параметр. При изменении λ от $-\infty$ до $+\infty$ точка z однократно описывает окружность радиуса r.

В другой мюнстерской работе («К теории степенных рядов») Вейерштрасс пользуется свойством равномерной сходимости степенных рядов. Он рассматривает степенные ряды и для случая многих комплексных переменных. Там же Вейерштрасс доказал теорему: если последовательность аналитических функций сходится равномерно внутри некоторой области (т. е. в каждом замкнутом круге, принадлежащем области), то предел этой последовательности – тоже аналитическая функция в этой области [108, с. 247]. Эту теорему легко переформулировать и для ряда из аналитических функций в области. У Вейерштрасса имеется и следующая теорема: если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ непрерывны в ограниченной замкнутой области $\bar{D}$ комплексной плоскости и аналитичны в D, то из равномерной сходимости этого ряда

на границе области D следует его равномерная сходимость в замкнутой области $\bar{D}$ [197, с. 617].

Еще в одной из работ Вейерштрасса мюнстрерского периода описан процесс аналитического продолжения степенных рядов и его применения к представлению решений системы дифференциальных уравнений за пределами первоначальной области сходимости. Этого до Вейерштрасса не делал никто из математиков. Менее чем через 10 лет к идее аналитического продолжения пришел В. Пюизё в связи с частной задачей представления алгебраических функций, а на год позже, чем у Пюизё, аналитическое продолжение в общем виде использовал Б. Риман в своей диссертации.

О вкладе Вейерштрасса в разработку теории эллиптических и абелевых функций мы скажем позже. А сейчас отметим, что в работе «К теории однозначных аналитических функций» (1876) приведена теорема о разложении целых аналитических функций на первичные множители в бесконечное произведение (т. е. в так называемое каноническое произведение) [197, с. 616]. Она послужила началом общей теории целых (и мероморфных) функций.

Работа Вейерштрасса «Некоторые теоремы, относящиеся к теории аналитических функций многих переменных» (1879) начиналась так называемой подготовительной теоремой, дававшей основы теории делимости степенных рядов для случая многих переменных [108, с. 212].

В XIX в. особенно большое внимание уделялось разработке **теории эллиптических функций**. Гаусс начал заниматься этой теорией уже с 1797 г., но не публиковал своих результатов в этой области, о них стало известно только после его смерти. Абель опубликовал свои исследования по эллиптическим функциям в 1827–1828 гг., а Якоби, соревнуясь с ним, – в 1829 г. С середины 90-х гг. XVIII в. и в первые два десятилетия XIX в. А. М. Лежандр (1752–1833) разработал и опубликовал теорию эллиптических интегралов, выделив три их канонических вида. Название здесь происходит из-за того, что длину дуги эллипса можно выразить с помощью такого интеграла.

Гаусс, Абель и Якоби действовали по однотипной схеме. Они определяли эллиптическую функцию как обратную к эллиптическому интегралу первого рода с переменным верхним пределом. Здесь рассматривается обратная функция в обычном

смысле, а не как подынтегральная функция по отношению к первообразной. Это аналогично тому, как для интеграла

$$z = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x$$

(он не является эллиптическим) обратной в обычном смысле функцией является не $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, а $x = \sin z$. Функцию, обратную в обычном смысле интегралу, а также процесс ее отыскания здесь кратко называют обращением интеграла.

Интегралы у этих математиков немного отличались, а Гаусс, кроме того, при определении лемнискатических функций брал интеграл, с помощью которого выражается длина дуги лемнискаты. Функцию, обратную к эллиптическому интегралу, они периодически продолжали в комплексную плоскость так, что она имела два периода: один действительный, а другой – мнимый. Кроме основной функции, вводились еще и связанные с ней функции. Выводилась формула сложения, т. е. формула для эллиптической функции от суммы двух ее аргументов, а из нее выводились многочисленные свойства эллиптических функций. Якоби выражал эллиптические функции также через тэта-функции. Об этом мы детально писали в [289] в очерках о Гауссе, Абеля и Якоби.

Вейерштрасс построил теорию эллиптических функций по-иному, чем его предшественники. Лекции по теории эллиптических функций он читал с 1860 г. на протяжении многих лет. Материал этих лекций по записям его слушателей составил пятый том его «Математических трудов», изданный в 1915 г. При жизни Вейерштрасса эти лекции не публиковались, за исключением справочника по эллиптическим функциям Вейерштрасса, составленого его учеником Г. А. Шварцем и опубликованного в 1893 г. Шестой том собрания трудов Вейерштрасса составили его лекции по применению эллиптических функций в геометрии и механике.

Общее определение Вейерштрасса эллиптических функций (без получения их из эллиптических интегралов) является простым, хотя теория изучаемых им эллиптических функций является довольно сложной.

Пусть ω_1 и ω_2 – действительные или комплексные числа, отношение которых не является действительным числом. Функция $f(z)$ называется двоякопериодической с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$, если $f(z+2\omega_i) = f(z)$ $(i = 1,2)$ для всех значений аргумента, при

которых она существует. Эллиптической функцией называется двоякопериодическая функция, если она аналитическая и не имеет никаких особых точек, кроме плюсов в конечной части плоскости.

Эллиптическая функция имеет некоторое сходство с какой-нибудь тригонометрической функцией, хотя тригонометрические функции и в комплексной плоскости являются однопериодическими. Основная эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(z)$ (пэ-функция от z) имеет некоторое сходство с функцией

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (z - m\pi)^{-2},$$

имеющей двукратные полюсы $m\pi$.

Вейерштрасс определяет свою функцию следующим образом:

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{m,n}{}' [(z - \Omega_{m,n})^{-2} - \Omega_{m,n}^{-2}]$$

где $\Omega_{m,n} = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$, а числа ω_1 и ω_2 удовлетворяют указанному выше предположению. Суммирование здесь производится по всем целым числам m, n, кроме пары $m = n = 0$. Штрих у знака суммы означает, что эта пара не используется при суммировании. Укажем некоторые свойства этой функции и основные факты теории эллиптических функций Вейерштрасса.

Показывается, что $\wp(z)$ – эллиптическая с периодами $2\omega_1$ и $2\omega_2$. В точках $\Omega_{m,n}$ и $z = 0$ она имеет двукратные полюсы. Это четная функция.

Прежде чем дать это основное определение функции $\wp(z)$, Вейерштрасс рассматривает эллиптический интеграл $z = \int \frac{dx}{\sqrt{P_4(x)}}$, где

$$P_4(x) = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e.$$

В алгебраической теории инвариантов рассматривается бинарная форма 4-й степени

$$P = ax_1^4 + 4bx_1^3x_2 + 6cx_1^2x_2^2 + 4dx_1x_2^3 + ex_2^4$$

(см. ниже стр. 129, где указаны и два ее инварианта g_2 и g_3). Вейерштрасс с помощью некоторой дробно-линейной замены доказывает, что имеет место равенство

$$\frac{dx}{\sqrt{P_4(x)}} = -\frac{dt}{\sqrt{S(t)}},$$

где $S(t) = 4t^3 - g_2 t - g_3$. Свою функцию $\wp(z)$ Вейерштрасс определяет как обращение эллиптического интеграла

$$z = \int_{\wp(z)}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{S(t)}}.$$

Дифференцируя по z, получаем: $1 = -\frac{1}{\sqrt{S(t)}}\wp'(z)$, где $t = \wp(z)$, поэтому производная $\wp'(z)$ находится из формулы

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3.$$

Показывается, что g_2 и g_3 имеют вид

$$g_2 = 60\sum_{m,n}{}'\Omega_{m,n}^{-4}, \qquad g_3 = 140\sum_{m,n}{}'\Omega_{m,n}^{-6}.$$

Функция $\wp'(z)$ – нечетная, она тоже эллиптическая с теми же периодами, что и у $\wp(z)$. Функции $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ Вейерштрасс называет основными функциями своей теории.

Поскольку функция $\wp(z)$ четная и аналитическая всюду, кроме полюсов, то ее можно по формуле Тейлора разложить в степенной ряд

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} z^{2n}$$

Коэффициенты этого ряда выражается через g_2 и g_3:

$$c_2 = \frac{g_2^3}{2^2 \cdot 5}, \; c_4 = \frac{g_3}{2^2 \cdot 7}, \; c_6 = \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2}, \ldots$$

Для $\wp(z)$ устанавливается теорема сложения, в ней кроме $\wp(z)$, фигурирует и $\wp'(z)$.

Показывается, что величины $e_1 = \wp(\omega_1)$, $e_2 = \wp(\omega_2)$ и $e_3 = \wp(\omega_3)$ (где $\omega_3 = -\omega_1 - \omega_2$) являются корнями кубического уравнения $4t^3 - g_2 t - g_3 = 0$.

Вейерштрасс доказал основную теорему своей теории эллиптических функций: любые две эллиптические функции с одинаковыми периодами связаны между собой некоторым алгебраическим соотношением. Это означает, что через функции $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ может быть рационально выражена любая эллиптическая функция с теми же периодами.

В своей теории Вейерштрасса вводит еще две новые функции: ξ-функцию (не путайте с ζ-функцией Римана) и σ-функцию. Ряд для $\wp(z)$ сходится равномерно относительно z и абсолютно всюду, кроме окрестностей полюсов, поэтому его

можно почленно интегрировать. Так получается в виде ряда функция $\zeta(z)$, она удовлетворяет уравнению $\zeta'(z) = \wp(z)$. Функция $\zeta(z)$ имеет простые плюсы при $z = 0$ и $z = \Omega_{m,n}$. Эта функция имеет некоторое сходство с функцией $\mathrm{ctg} z$. Функцию $\sigma(z)$ Вейерштрасс вводит в виде некоторого бесконечного произведения, она имеет сходство с функцией $\sin z$, является целой функцией. Функции $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ не являются эллиптическими, так как они не периодические. Но они играют важную роль в теории эллиптических функций Вейерштрасса.

Подробнее с эллиптическими функциями Вейерштрасса можно познакомиться по книге: Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. – М.: Физматлит, 1968. – Т. 2. – Гл. 20.

На протяжении всей своей творческой жизни Вейерштрасс много занимался **теорией абелевых интегралов и абелевых функций**. Определение абелева интеграла приведено выше на с. 20. Абель начал изучать интегралы, носящие его имя, в работе 1826 г., представленной в Парижскую АН на рассмотрение Коши, который так и не рассмотрел ее. Она была напечатана в 1841 г., через 12 лет поле смерти Абеля. Мы писали об основных результатах этой работы в [289, с. 104–105]. В той работе Абель доказал свою теорему о представлении абелева интеграла в виде суммы некоторого числа канонических абелевых интегралов и некоторых внеинтегральных членов. Изучение абелевых интегралов продолжил Риман в работе «Теория абелевых функций» (1857). Он разбил абелевы интегралы на три рода (см. выше с. 22), а подробно в [108, с. 234–241]. Здесь он называет абелевы интегралы абелевыми функциями. Начиная с Якоби и Вейерштрасса под абелевыми функциями понимают однозначные функции, возникающие при рассмотрении проблемы Якоби обращения абелевых интегралов первого рода. В общих чертах эта проблема заключается в следующем.

Если речь идет об обращении одного абелева интеграла $\int_c^x R(t,w)dt = u$ первого рода, то проблема Якоби заключается в представлении x как функции от u, т. е. получается в качестве абелевой функции эллиптическая двоякопериодическая функция. Она является однозначной, хотя абелев интеграл – многозначная функция в силу зависимости от пути интегрирования. Якоби в работе 1835 г. рассмотрел систему

$$\int_{c_1}^{x_1}\frac{dt}{\sqrt{P_6(t)}}+\int_{c_2}^{x_2}\frac{dt}{\sqrt{P_6(t)}}=u_1,$$

$$\int_{c_1}^{x_1}\frac{tdt}{\sqrt{P_6(t)}}+\int_{c_2}^{x_2}\frac{tdt}{\sqrt{P_6(t)}}=u_2,$$

где $P_6(t)$ – многочлен 6-й степени. Якоби показал, что функции x_1+x_2 и x_1x_2 являются четырежды периодическими и притом однозначными функциями от u_1, u_2. Он называл их абелевыми функциями. Эти функции являются частными случаями симметрических функций. При этом Якоби поставил проблему обращения системы с суммами n абелевых интегралов, где требовалось искать x_i как функции от переменных $u_1,\dots,u_n$.

Теория абелевых функций Вейерштрасса является сложной, с ней можно ознакомиться в [108, с. 230–234] и в [132]. Мы сделаем только краткое сообщение. Как уже отмечалось выше в пункте 1, Вейерштрасс опубликовал в журнале Крелле работу «К теории абелевых функций» (1854), а затем там же большую работу «Теория абелевых функций» (1856). Первая из них содержала краткое изложение результатов его исследований по проблеме обращения гиперэллиптических интегралов во многом без доказательств, а вторая – развернутое изложение первой. Вторая работа была опубликована не полностью, часть ее Вейерштрасс забрал обратно, уступив место публикации работы Римана, чтобы сверить его результаты со своими. Он не стал публиковать забранную часть, увидев, что окончательная цель работы не была достигнута. Понятие абелевой функции как $2p$-периодической мероморфной функции p переменных Вейерштрасс ввел на основе проблемы Якоби обращения абелевых интегралов. В 1862 г. Вейерштрасс сформулировал теорему о том, что между $p+1$ абелевыми функциями с одинаковыми периодами существует алгебраическое соотношение, но в общем виде доказать ее не смог. Полное доказательство дал Пуанкаре в 1897 г. в своих лекциях по теории абелевых функций Вейерштрасс постоянно дополнял свои результаты, но дать полное решение проблемы Якоби обращения абелевых интегралов ему не удалось. Это сделал позже А. Пуанкаре со своим учеником П. Кузеном. Работая над этой проблемой, Вейерштрасс получил много важных результатов для функций многих комплексных переменных. В частности, он доказал, хотя и не в общем случае,что абелевы функции

в любой точке переменных $u_1,...,u_\rho$ можно представить в окрестности любой точки в виде частного двух всюду сходящихся степенных рядов. Якоби показал, что функция n переменных может иметь максимальное число $2n$ периодов. Вейерштрасс дал новое доказательство этой теоремы. Он доказал, что эллиптическая функция n переменных имеет $2n$ периодов и что любая функция, имеющая $2n$ периодов, обладает свойствами, аналогичными свойствам эллиптических функций. Лекции Вейерштрасса по абелевым интегралам и абелевым функциям составили четвертый том собрания его трудов, изданный в 1902 г.

Выше говорилось о критике Вейерштрассом нестрогого применения Риманом так называемого «принципа Дирихле». Вообще Вейерштрасс сдержанно относился к работам Римана, считая, что Риману не всегда удавалось изложить свои работы строго логически. На с. 42 мы указали также о вкладе Римана и Вейерштрасса в теорию минимальных поверхностей.

О работах Вейерштрасса по **высшей алгебре** сообщалось выше в пункте 1 этого очерка, а о результатах этих работ сказано ниже в разделе «Возникновение новых направлений в алгебре XIX в.» (с. 111, 158). Из лекций по алгебре Вейерштрасс только однажды прочел курс по теории детерминантов и ее приложениям.

Кратко скажем об очень важном вкладе Вейерштрасса в **вариационное исчисление**. Он изложил свои исследования по этому вопросу в своих курсах лекций, которые читал 8 раз в период с 1865 по 1889 г. Эти лекции по записям нескольких его слушателей составили седьмой том его «Математических трудов».

Хотя некоторые вариационные задачи рассматривались и решались, пусть и не строго, еще в Древней Греции, вариационное исчисление как наука начало строиться только в XVIII в. в трудах Эйлера, Лагранжа и Лежандра. В [234] в очерках об этих математиках мы рассматривали, в частности, и их вклад в вариационное исчисление.

Л. Эйлер (1707–1783) является главным из основоположников этой науки. Он исходил из простейшей вариационной задачи: найти кривую $y = y(x)$, дающую экстремум интегралу

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx\,, \qquad (1)$$

где

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1. \qquad (2)$$

Эйлер показал, что в этом случае искомая кривая должна удовлетворять дифференциальному уравнению $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$, т. е. является экстремалью. Это уравнение дает семейство экстремалей. С помощью граничных условий из него выбирается одна экстремаль, она «подозрительна» на экстремум интеграла. В работе 1744 г. Эйлер получил и дифференциальное уравнение для экстремалей в случае подынтегральной функции $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})$.

Ж. Л. Лагранж в работах 1761–1762 гг. предложил иной, очень эффективный метод получения дифференциальных уравнений Эйлера для экстремалей – метод вариаций. Подобно тому, как при переходе от значения аргумента функции к близкому вводится понятие дифференциала d аргумента и функции, Лагранж вводит символ δ (вариацию), играющий аналогичную роль в применении к кривым $y = y(x)$ и интегралу $J[y]$ при переходе к близким к ним. Необходимым условием для экстремума интеграла (функционала) $J[y]$ является условие $\delta J = 0$, откуда получается дифференциальное уравнение Эйлера для экстремалей.

Эйлер и Лагранж нашли лишь необходимые условия так называемого слабого экстремума интегралов, когда δy и $\delta y'$ предполагаются бесконечно малыми, т. е. когда предполагается близость не только варьируемых кривых $y = y(x)$, но и их первых производных $y'(x)$. Достаточные условия слабого экстремума интеграла (1) получил в 1786 г. А. М. Лежандр, хотя и не полно (см. [234, с. 205 – 207]), а в полном виде – К. Г. Якоби в 1837 г.

Если же рассматривается лишь близость кривых, т. е. без близости их производных, то говорят о сильном экстремуме интегралов. До Вейерштрасса никто не пытался рассмотреть вопрос о сильном экстремуме в вариационном исчислении. Большой заслугой Вейерштрасса является то, что он дал достаточные условия сильного экстремума в вариационных задачах, с помощью выведенной им так называемой E-функции. Она позволяет узнать, какой именно сильный экстремум имеет интеграл – максимум или минимум, или же не имеет его.

Вейерштрасс решал вариационную задачу для кривых, заданных параметрически. Его вывод E-функцию приведен, например, в [109]. Мы укажем ниже его E-функции для задачи (1) – (2), где кривые рассматриваются в виде

$y = y(x)$, тогда вывод E-функции будет проще. При ее выводе для задачи (1) – (2) исходят из приращения ΔJ интеграла (1) как разности исходного интеграла по кривой $y = y(x)$ и интеграла, полученного при переходе от этой кривой к близкой к ней по положению. В результате преобразований приращения ΔJ получается, что

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} E(x, y, p, y')dx .$$

Здесь под интегралом функция Вейерштрасса, она в случае задачи (1) – (2) имеет вид

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_{y'}(x, y, p) \qquad (3)$$

где $p = p(x, y)$ – наклон поля экстремалей рассматриваемой вариационной задачи (1) – (2). Видно, что функция E представляет собой разность между подынтегральной функцией $F(x, y, y')$ в интеграле (1) и первыми ее двумя членами разложения по формуле Тейлора по переменной y' в точке, отвечающей значению p. Функция E дает достаточные условия сильного экстремума вариационной задачи (1) – (2), а при его отсутствии – слабого. Если знак функции E не зависит от y' на экстремалях, то на экстремали, удовлетворяющей граничным условиям (2), имеем сильный экстремум: если $E \ge 0$, то минимум, а если $E \le 0$, то максимум. Если E меняет знак в зависимости от y', то сильного экстремума нет, но может быть слабый. Покажем это на следующем примере:

$$J[y] = \int_0^1 (y'^3 + y')dx , \quad y(0) = 0 , \quad y(1) = 2 .$$

Здесь уравнение Эйлера $F_y - \dfrac{d}{dx}F_{y'} = 0$ имеет вид $6y'y'' = 0$, поэтому экстремалями интеграла (1) являются прямые $y = C_1x + C_2$. Из них граничным условиям удовлетворяет экстремаль $y = 2x$. На этой экстремали наклон касательной $p = 2$. Составим функцию Вейерштрасса

$$E(x, y, p, y') = y'^3 + y' - p^3 - p - (y' - p)(3p^2 + 1) = y'^3 - 3p^2y' + 2p^3 = (y' - p)^2(y' + 2p)$$

При $p = 2$ получаем $E = (y' - 2)^2(y' + 4)$. Здесь $E < 0$ при $y' < -4$ и $E \ge 0$ при $y' > -4$, т. е. функция E меняет знак в зависимости от y', следовательно, сильного экстремума нет. При y' близких к $p = 2$, получаем, что $E \ge 0$, поэтому на экстремали $y = 2x$ достигается слабый минимум.

С выводом E-функции Вейерштрасса (3) для задачи (1) – (2) можно познакомиться по учебнику: Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Физматлит, 1965. – Гл. 8.

3. Вейерштрасс и Ковалевская.

Софья Васильевна Ковалевская (1850–1891) была первой русской женщиной-математиком и притом достигшет выдающихся успехов, несмотря на короткую жизнь. Кроме того, она сыграла особую роль в жизни Карла Вейерштрасса. Ковалевская родилась в Москве в семье генерала Корвин-Круковского. В 1858 г. отец вышел в отставку, и семья переехала в свое имение Палибино в Витебской губернии. Школьное образование Софья получила у домашних учителей. Уже тогда были замечены ее большие способности к математике и физике. В 1867–1868 гг. в Петербурге ее обучал высшей математике преподаватель Морского училища А. П. Страннолюбский. В России женщинам доступ в университеты был закрыт. Софья и ее старшая сестра Анна решили уехать за границу, чтобы получить там высшее образование. Для получения загранпаспорта в то время девушки нередко вступали с кем-нибудь в фиктивный брак. Софья Васильевна так и сделала, заключив фиктивный брак с Владимиром Онуфриевичем Ковалевским (1842–1883), юристом, который за границей стал заниматься эволюционной палеонтологией и вскоре стал основоположником этой науки. В 1869 г. «супруги» уехали за границу и обосновались в немецком городе Гейдельберг. Вскоре туда приехала на учебу подруга Софьи Юлия Всеволодовна Лермонтова, они вместе жили там на квартире. Совет Гейдельбергского университета разрешил некоторым лекторам по их усмотрению допускать на свои лекции слушательниц. Ковалевская в 1869–1870 гг. слушала лекции по математике Кёнигсбергера (ученика Вейерштрасса) и Дюбуа-Реймона, а по физике – у Кирхгофа. Лермонтова слушала лекции по химии. Ковалевский посещал лекции в разных городах Германии. По-видимому, Кёнигсбергер посоветовал Ковалевской прослушать курс лекций Вейерштрасса в Берлине, он дал ей хорошую характеристику. В Берлинском университете женщинам посещать лекции не разрешалось, не сделали исключения и для Ковалевской. Даже Вейерштрасс, как он писал об этом Л. Фуксу, был противником обучения женщин в университетах [132, с. 155].

В октябре 1870 г.у 55-летнего Вейерштрасса появилась 20-летняя ученица – Софья Ковалевская. Она поселилась вместе с подругой Юлией недалеко от квартиры Вейерштрасса. Для проверки ее знаний он дал ей на неделю несколько сложных задач и был изумлен, когда она пришла с правильными решениями. Вейерштрасс согласился заниматься с ней частным образом: два раза в неделю у себя дома, а иногда приходил к ней на квартиру. Он повторял ей содержание своих лекций, прочитанных студентам, рассказывал о своих исследованиях. Вейерштрасс писал Шварцу о Ковалевской как о «высокоодаренной ученице, которая вполне вникла в теорию» [131, с. 24]. Вскоре их общение переросло в большую и нежную дружбу, особенно после того, как Софья рассказала Вейерштрассу о своем фиктивном браке с В. О. Ковалевским, к которому она относилась с большой симпатией и вела с ним переписку. Иногда Вейерштрасс ходил с Софьей и ее подругой Юлией в театр или на концерты. Вейерштрасс занимался с Ковалевской три года, руководил ее работами для получения докторской степени без экзаменов. За это время она написала три работы: «К теории дифференциальных уравнений в частных производных», «О приведении одного класса абелевых интегралов третьего ранга к интегралам эллиптическим», «Дополнения и замечания к исследованию Лапласа о форме кольца Сатурна». С рецензией Вейерштрасса они были посланы в Гёттингенский университет. За эти работы там ей была в 1874 г. присуждена докторская степень с отличием и притом заочно. Докторскую степень за работу по химии получила и Юлия Лермонтова, но со сдачей экзаменов. В том же году диссертация Ковалевской была напечатана.

В первой из указанных выше диссертационных работ С. . Ковалевская доказывает теорему, которая в настоящее время называется теоремой Коши-Ковалевской и утверждает существование и притом единственного аналитического решения задачи Коши в малом, если функции, задающие дифференциальное уравнение или систему дифференциальных уравнений и все начальные данные являются аналитическими. Это очень важная теорема, она доказана Ковалевской для весьма общей системы дифференциальных уравнений в частных производных с применением метода мажорантных функций Вейерштрасса. О схеме ее доказательства см. в [156, с. 87–90].

В 1874 г. Ковалевская вернулась в Россию и поселилась в Петербурге. Туда же переехал и ее муж, работавший приват-доцентом Московского университета. Их фиктивный брак стал фактическим. В их доме бывали видные ученые. Ковалевская пытается получить место преподавателя в вузе, но законы не позволяют этого. Даже преподавать на Высших женских курсах в Петербурге и в Париже ей было отказано. Ее не допустили в России и к сдаче экзаменов на степень магистра. Она временно отходит от занятий математикой и занимается литературно-публицистической деятельностью. Изредка переписывается с Вейерштрассом. В 1878 г. в семье Ковалевских родилась дочь. Летом 1881 г. Ковалевская вместе с дочерью приехала на краткое время в Берлин, отдыхала с Вейерштрассом и его сестрами в Мариенбаде.

Для поддержания семейного бюджета Ковалевские стали заниматься коммерцией (издание книг, работа мужа в одном фабричном обществе), но у них не было опыта в таких делах. Из-за недобросовестного поведения своих компаньонов В. О. Ковалевский увяз в долгах и в 1883 г. покончил жизнь самоубийством. Вейерштрасс узнал о бедственном положении Ковалевской и написал большое письмо своему бывшему ученику Гёсте Миттаг-Леффлеру, професссору Стокгольмского университета, поддержав его идею об устройстве туда Ковалевской. Благодаря хлопотам Миттаг-Леффлера С. В. Ковалевская в 1883 г. стала приват-доцентом, а с 1884 г. – ординарным профессором Стокгольмского университета. Она была знакома с Миттаг-Леффлером уже с 1876 г. и в дальнейшем поддерживала с ним и его семьей дружеские отношения. О Миттаг-Леффлере см. книгу [291]. Ковалевской разрешили читать лекции на немецком языке, но в течение семестра она освоила шведский и в дальнейшем читала лекции на нем. За 8 лет работы она прочла 12 различных курсов, лекций.

В Стокгольме Ковалевская продолжила свои научные исследования. В 1885 г. опубликовала статью «О преломлении света в кристаллах». Затем она занялась задачей о вращении не вполне симметрического твердого тела вокруг неподвижной точки. Парижская АН уже не раз объявляла конкурс на эту тему, но никто не мог найти решения.

Ковалевская решила принять участие в таком конкурсе, и в 1888 г. получила премию Бордена Парижской АН за свою работу «Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки». В следующем году за новую работу, по этой теме она

получила премию Шведской АН. Задачей о вращении твердого тела начали заниматься уже Эйлер и Лагранж, но до Ковалевской никакого продвижения в этой задаче не было. Вейерштрасс писал Шварцу о достижении Ковалевской по этой теме: «Кроме известных случаев, она нашла, что существует еще один, очень специальный, но неожиданным образом трудный для исследования» [132, с. 200]. Ковалевская была избрана в 1889 г. членом-корреспондентом Петербургской АН. В переводах на русский язык в 1948 г. вышло второе издание ее научных трудов. Умерла С. В, Ковалевская в 1891 г. в Стокгольме от воспаления легких на 42-м году жизни. Там она и похоронена.

Кроме таланта к математике и механике, С. В. Ковалевская обладала неординарным литературным талантом. Ей принадлежат увлекательные повести «Нигилистка» (1884) и «Воспоминания детства» (1890). На шведском языке она вместе со шведской писательницей А.-Ш. Леффлер (сестрой Миттаг-Леффлера) написала драму «Борьба за счастье» (1887). В 1974 г. в Москве вышел большой том «Воспоминания и повести», куда вошли указанные выше повести С. В. Ковалевской, драма, очерки и др.

С. В. Ковалевская сохранила все письма к ней и записи Вейерштрасса, их около сотни, они опубликованы в переводе на русский язык в 1971 г. Вейерштрасс сжег ее письма к нему [132, с. 159].

О Вейерштрассе и Ковалевской: [131; 132; 197, т. 1, с. 614–624; т. 3, с. 65–67; 3, с. 188–193; 108, гл. 2; 109, с. 207–211; 137; 144; 140; 133; 134; 70, с. 157–170; 291; 156, с. 87–90; 290, с. 266–267, с. 297–299; 14; 15].

Чебышев

Самым выдающимся русским математиком и механиком второй половины XIXв. является **Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894)**, всемирно известный ученый, основатель петербургской математической школы.

По его собственному указанию его фамилию следует произносить «Чебышóв» [5, с. 417]. Начало их роду положил некий Чебыш, храбрый воин, перешедший в давние времена на русскую службу [127, с. 67]. П. Л. Чебышев родился в с. Окатово

Боровского уезда Калужской губернии в семье богатого помещика, представителя старинного дворянского рода. Мать тоже была дворянкой. Отец Лев Павлович в молодости служил корнетом в конно-казачьем полку, принимал участие в Отечественной войне 1812 г. и взятии Парижа в 1814 г. В 1815 г. вышел в отставку и занимался хозяйством. В Тульской, Московской и Калужской губерниях ему принадлежали наследственные имения, в которых числилось около 1350 душ [126, с. 15]. В Москве у Чебышевых был собственный дом. В семье было 9 детей: пять сыновей и четыре дочери. Пафнутий был старшим из братьев. Два его брата стали генералами от артиллерии. В с. Окатово семья Чебышевых жила в большом деревянном доме.

Школьное образование Пафнутий получил дома. Грамоте его научила мать Аграфена Ивановна, арифметике и французскому языку – двоюродная сестра Авдотья Сухарева. В детстве у него была и учительница музыки, которая музыке его не научила, но приучила к точности. В. Е. Прудников пишет: «Он [П. Л. Чебышев] имел с детства одну ногу сведенной, немного хромал и ходил с палочкой. До сих пор не удается выяснить причину этого физического недостатка, сыгравшего в жизни Пафнутия Львовича большую роль […], вынуждая его избегать детских игр и заставляя больше сидеть дома. Правда, дома мальчик не сидел праздно, а занимался с большой любовью устройством механических приборов» [126, с. 30–31]. Конструированием различных механизмов он много занимался и в дальнейшей жизни.

Желая дать своим старшим сыновьям Пафнутию и Павлу хорошее образование, Чебышевы в 1832 г. переехали в Москву. Родовитые русские дворяне в то время презрительно относились к гимназиям как к общесословным школам. Поэтому Чебышевы не отдали своих сыновей в гимназию, а приглашали в дом хороших преподавателей. Для обучения математике и физике был приглашен лучший из московских преподавателей П. Н. Погорельский (1800–1852), магистр Масковского университета, вскоре ставший директором одной из московских гимназий и сделавший ее образцовой. Он отличался большой строгостью и требовательностью к своим учащимся. В 30-х гг. XIX в. он перевел с французского и издал трехтомное учебное пособие Белловеня по элементарной математике, по которому в русских гимназиях преподавали математику в течение нескольких десятилетий. Из частей

этого пособия наибольшей популярностью пользовалась «Алгебра», в 1863 г. вышло ее 8-е издание. Латинскому языку П. Л. Чебышева обучал А. Т. Тарасенков, в то время студент-медик, он считался в Москве одним из лучших латинистов, переводивших классиков. Позже он стал главврачом Шереметьевской (ныне имени Н.В. Склифосовского) больницы. За него вышла замуж Елизавета – старшая из сестер П. Л. Чебышева.

В 1837 г., успешно сдав вступительные экзамены, П. Л. Чебышев становится студентом 2-го (физико-математического) отделения философского факультета Московского университета. Привыкнув дома к суровости и требовательности своего учителя П. Н. Погорельского, Чебышев является образцовым студентом: рано приходит на лекции, не пропускает их, старательно и усердно занимается, имеет отличную успеваемость.

В то время в Москве не было крупных математиков. С 1814 г. в Казанском университете работал самый выдающийся русский математик первой половины XIX в. Николай Иванович Лобачевский (1792–1856), ординарный профессор с 1829 г. В С.-Петербурге с 1828 г. работал в Академии наук и разных вузах Михаил Васильевич Остроградский (1801–1862), ординарный академик Петербургской АН с 1831 г. С 1827 г. в С.–Петербурге в разных вузах и в Академии наук работал Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889), ординарный академик с 1841 г; в частности, в 1846–1859 гг. он работал в Петербургском университете. О них мы писали в [289].

Во время учебы Чебышева в Московском университете работали выдающиеся педагоги-математики, которые дали ему хорошую подготовку по математике и механике. Скажем о них немного, подробные очерки о них имеются в книге [196].

Николай Дмитриевич Брашман (1796–1866) родился в Моравии. Окончил Венский политехнический институт и Венский университет в 1821 г. В 1825–1834 гг. преподавал в Казанском университете, с 1834 г. – профессор прикладной математики и механики в Московском университете. В 1839 г. принял русское подданство. В ряде работ 30-х гг. XIX в. Брашман знакомит русских математиков с достижениями Штурмана, Абеля, Пуассона и др. Его исследования относятся главным образом к гидродинамике и принципу наименьшего действия. В Московском университете он усовершенствовал преподавание механики. Большой популярностью пользовался его учебник «Аналитическая геометрия» (1836), удостоенный Демидовской премии

Петербургской АН. Второй раз эту премию Брашман получил за учебник «Теория равновесия тел жидких и твердых» (1837). Брашман является основателем Московского математического общества и журнала «Математический сборник», в 1866 г. вышел первый номер этого журнала. Член-корреспондент Петербургской АН. Брашман первым обратил внимание на выдающиеся математические способности студента Чебышева, у них сложились тесные отношения.

Николай Ефимович Зернов (1804–1862) родился в Москве, окончил Московский университет, работал там с 1835 г. экстраординарным профессором чистой математики, с 1842 г. – ординарный профессор. Самостоятельными исследованиями фактически не занимался, но обладал большой эрудицией в отношении современной ему западноевропейской математики, был поклонником творчества Коши, используя его теорию пределов в свои лекциях. Докторская диссертация Зернова «Рассуждения об интеграции уравнений с частными дифференциалами» – это его расширенный курс лекций по уравнениям с частными производными, который Зернов читал студентам старших курсов. Это пособие составлено по первоисточникам ряда западноевропейских математиков. Пособие Зернова «Дифференциальное исчисление с приложением к геометрии» (1842) по рекомендации М. В. Остроградского было удостоено Демидовской премии. Зернов является изобретателем перископа.

Большим влиянием в то время на физико-математическом отделении Московского университета пользовался **Дмитрий Матвеевич Перевощиков (1788–1880)** – астроном и математик. Окончил Казанский университет. В Московском университете преподавал с 1819 г., профессор с 1826 г., декан в 1846–1851 гг. Самостоятельными исследованиями он не занимался, а известен как один из лучших педагогов и автор ряда пособий. Он написал «Ручную математическую энциклопедию» в 13 небольших томах (1826–1828). Первые ее семь томов посвящены математике, остальные – механике, физике, оптике и астрономии. В течение многих лет она служила учебником для студентов. За «Руководство к астрономии» (1826) Перевощиков получил Демидовскую премию. Чебышев слушал курс лекций Перевощикова по астрономии. Перевощиков опубликовал и свое «Руководство к опытной физике» (1833). В 1851 г. Перевощикова избрали адъюнктом Петербургской

АН, он переезжает в С.-Петербург, а с 1855 г. становится экстраординарным (т. е. внештатным) академиком.

Как видим, в период учебы П. Л. Чебышева в Московском университете в 1837–1841 гг. учебно-педагогическая работа там была на высоком уровне. Недостатком было то, что самостоятельные научные исследования почти не велись. Тем более резкий контраст представляет собой будущая высокая научная продуктивность П. Л. Чебышева. Следует все же отметить один недостаток математического образования в Московском университете в то время: отсутствие внимания к начавшейся зарождаться (у Эйлера, Д'Аламбера, Лапласа, Гаусса и особенно у Коши) теории функций комплексного переменного. Возможно, что этим объясняется очень слабый интерес Чебышева к вопросам этой новой популярной в Западной Европе теории, ставшей к концу XIX в. самостоятельной наукой.

В 1840–1841 учебном году был объявлен студенческий конкурс на тему «О числовом решении алгебраических уравнений высших степеней». Пафнутий Чебышев принял в нем участие и был награжден за свою работу серебряной медалью. Эта работа была написана уже в 1838 г. при переходе на второй курс.

В 1841 г. Чебышев окончил Московский университет «отличнейшим кандидатом». В том же году в России начался голод. Чебышевы вынуждены были переехать в деревню, так как дела отца расстроились. Пафнутий остался жить в Москве в родительском доме, но получал от родителей лишь очень скромную материальную поддержку. Тем не менее он решил готовиться к экзаменам на степень магистра. Магистерские экзамены были письменными, их принимали по ряду предметов с интервалами в несколько месяцев на заседании физико-математического отделения. Чебышев успешно сдал их с апреля по ноябрь 1943 г. Затем следовало написать и защитить магистерскую диссертацию. Уже в конце учебы Чебышева в университете о нем не без содействия Брашмана стало известно попечителю московского учебного округа графу С. Г. Строганову, и тот предложил Чебышеву написать работу по элементарному изложению теории вероятностей для Демидовского лицея в Ярославле. Эту тему и выбрал Чебышев взамен предложенной ему темы магистерской диссертации. В 1846 г. он успешно защитил магистерскую диссертацию «Опыт элементарного анализа теории вероятностей», она была опубликована в 1845 г. еще до защиты.

В 1847 г. Чебышев переехал в Петербург, в мае защитил в Петербургском университете диссертацию «Об интегрировании с помощью логарифмов» на право чтения лекций и был утвержден в штатной должности адъюнкта (доцента) этого университета. На год раньше туда же на работу был приглашен академик В. Я. Буняковский, он был официальным оппонентом на защите диссертации Чебышева. После этого Чебышеву было поручено читать лекции по высшей алгебре на втором курсе и по теории чисел на четвертом.

В 1844 г. правнук Л. Эйлера академик П. Н. Фусс обнаружил в архиве Академии наук многие неопубликованные рукописи Эйлера. Работа по составлению указателя теоретико-числовых работ Эйлера была поручена Буняковскому, а он привлек к этой работе Чебышева. В 1848/49 учебном году, кроме указанных выше лекций, у Чебышева добавились лекции по сферической тригонометрии, аналитической геометрии и интегральному исчислению.

В 1848 г. П. Л. Чебышев защитил в Петербургском университете докторскую диссертацию «Теория сравнений». В 1849 г. вышло первое издание книги Чебышева «Теория сравнений» с приложением его статьи «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины». В том же году Академия наук присудила ему за эту книгу Демидовскую премию. До этой книги на русском языке сведения по теории чисел имелись только в книге Н. И. Лобачевского «Алгебра» (1834) и в «Лекциях алгебраического и трансцендентного анализа» (1936) М. В. Островского. Книга П. Л. Чебышева «Теория сравнений» была первым и еще долго оставалась единственным руководством по теории чисел на русском языке. Она выдержала несколько изданий, была переведена на немецкий и итальянский языки.

В 1850 г. Чебышева избрали экстраординарным, а в 1860 г. – ординарным профессором Петербургского университета.

В 1849 г. П. Л. Чебышев в журнале *Comptes rendus* Парижской АН опубликовал краткую статью о своих результатах в теории распределения простых чисел, а в 1852г. вышли две его подробные работы по этой же теме во французском «Журнале чистой и прикладной математики», издаваемом Лиувиллем. Одна из них та, что вошла в качестве приложения в его книгу «Теория сравнений», а вторая – «О простых числах». Мы упоминали о них выше в очерке о Римане, а ниже будем говорить о них подробнее. В этих работах Чебышев первым добился крупного успеха

в установлении асимптотического закона распределения простых чисел. Эти работы принесли Чебышеву всеевропейскую известность, ими заинтересовались Эрмит, Коши и другие математики. Многие из своих работ Чебышев писал на французском языке.

В июне – октябре 1852 г. Чебышев был в научной командировке в Англии, Франции и Бельгии. Он интересовался достижениями машиностроения в Западной Европе, побывал на заводах и фабриках. Кроме того, он встречался с выдающимися математиками: в Англии – с Сильвестром, во Франции – с Коши, Лиувиллем, Серре, Эрмитом и др. Вернувшись в Петербург, в дополнение к лекциям в университете некоторое время читал там и в Александровском (бывшем Царскосельском) лицее курс практической механики.

В 1853 г. вышла статья Чебышева «Об интегрировании иррациональных дифференциалов», а в 1854 г. – статья «Теория механизмов, известных под названием параллелограмов».

В 1853 г. Чебышева избрали адъюнктом Петербургской АН, в 1856 г. – экстраординарным, а в 1858 г. – ординарным академиком.

Укажем еще ряд важных работ П. Л. Чебышева, пользуясь в основном [120, т. 2, гл. 5]. Выходят его работы: о функциях, наименее уклоняющихся от нуля (1854, 1859 гг.), по теории интегрирования (1857, 1961 гг.). В 1860 г. Чебышева избрали членом-корреспондентом Парижской АН.

Далее продолжают выходить работы Чебышева: «Об интерполировании» (1864), «Об одном арифметическом вопросе» (1866), «О средних величинах» (1867), «О параллелограммах» (1869), «О предельных величинах интегралов» (1874). Центральная предельная теорема теории вероятностей доказана Чебышевым в его статье «О двух теоремах относительно вероятностей» (1887).

В 1871 г. П. Л. Чебышев избран членом Берлинской АН, в 1877 – членом Лондонского королевского общества (Академии наук), в 1874 г. – иностранным членом Парижской АН, а в 1890 г. награжден французским орденом Почетного легиона. Он был членом и многих других академий и научных обществ.

Кроме указанных выше лекций, которые он читал в начале своей педагогической работы, позже он читал лекции по дифференциальным уравнениям, по теории вероятностей с теорией конечных разностей, по теории эллиптических

функций (точнее, эллиптических интегралов, так как придерживался пособия О. И. Сомова, который эллиптические интегралы, как и Риман, называл эллиптическими функциями. Но при этом Чебышев излагал и некоторые результаты Абеля и Якоби). Его лекционные курсы не были длинными, содержали самое существенное в четком изложении. По свидетельству А. М. Ляпунова, П. Л. Чебышев читал лекции «живо и увлекательно», изложение сопровождалось «множеством интересных замечаний относительно значения и важности тех или других вопросов» [126, с.78].

Кроме работы в университете и академии, Чебышев с начала 1856 г. 13 лет работал как член Артиллерийского отделения Военно-учебного комитета и 17 лет как член учебного комитета Министерства народного просвещения [107, с. 217]. Кроме того, Чебышев много занимался конструированием различных механизмов.

П. Л, Чебышев является основателем Петербургской математической школы. Прямыми его учениками являются А. М. Ляпунов, Е. И. Золотарев, А. А. Марков, Г. Ф. Вороной, Д. А. Граве, А. Н. Коркин и многие другие. Петербургская математическая школа сыграла очень важную роль в развитии математики в России. В 1874 г. П. Л. Чебышев познакомился с С. В. Ковалевской. Он пытался, хотя и безуспешно, помочь ей устроиться на работу на Высших женских курсах в С.-Петербурге. В 80-х гг. XIX в. он вел с ней переписку.

П. Л. Чебышев был прост и доброжелателен в отношениях с коллегами и студентами. Один день в неделю у него на квартире был приемным для посетителей, туда приходили и студенты для консультаций, и коллеги для общения. Квартира его была обставлена чрезвычайно скромно, несмотря на то, что он был членом многих Академий наук. Он не был женат, но у него была дочь, которая с матерью жила отдельно. Он материально помогал им, а также своим сестрам.

В то время в России профессору после 25-летнего стажа работы полагалось уходить в отставку, но некоторым профессорам продлевали этот срок на 5 лет и не один раз. Чебышев проработал в университете 35 лет, а в 1882 г. ушел в отставку от работы в университете, но продолжал работать в Петербургской АН. Умер он в 1894 г. после осложнения от гриппа.

Из братьев П. Л. Чебышева ближе всех к нему был брат Владимир Львович – генерал от артиллерии, заслуженный профессор Артиллерийской академии. При его материальной поддержке в 1899–1907 гг. вышло первое двухтомное собрание трудов

П. Л. Чебышева. Он же передал в Академию наук и переписку П. Л. Чебышева с русскими и иностранными учеными [126, с. 21–22].

В 1944–1951 гг. издано 5-томное собрание сочинений П. Л. Чебышева. В 1944 г. Академия наук СССР учредила медаль и премию его имени за лучшие исследования по математике и премию за лучшие исследования по теории механизмов. Именем П. Л. Чебышева назван кратер на обратной стороне Луны.

Кратко рассмотрим достижения П. Л. Чебышева в математике. Здесь основными направлениями в его работах являются: теория чисел, теория вероятностей, теория приближений функций, в математическом анализе – теория интегрирования.

Рассмотрим главные результаты Чебышева **в теории чисел**. У него 7 работ по теории чисел. Всеевропейскую известность принесли ему две его ранние работы: «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величина» (1849) и «О простых числах» (1852). Они посвящены вопросам распределения простых чисел среди натуральных чисел. Функцию, выражающую число простых чисел, не превосходящих числа x, принято обозначать через $\pi(x)$, это обозначение ввел немецкий математик Э. Ландау в 1809 г., мы используем это обозначение, хотя Чебышев обозначал ее через $\varphi(x)$. Выше на с. 32–36 говорилось об этой функции и о работе Римана «О числе простых чисел, не превосходящих данной величины», написанной на 10 лет позже первой из указанных работ Чебышева. Там же говорилось об эмпирических формулах:

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - 1{,}08366} \quad \text{(формула Лежандра),}$$

$$\pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \quad \text{(формула Гаусса).}$$

Ниже для краткости будем использовать обозначение $\mathrm{Li}x = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$, это интегральный логарифм в неполном виде. Формулу Лежандра можно записать по-иному:

$$\ln x - \frac{x}{\pi(x)} \approx 1{,}08366\,.$$

Скажем об основных результатах работы Чебышева 1849 г. Главной целью этой работы было уточнение формулы Лежандра для $\pi(x)$ при больших x и притом теоретически, независимо от таблиц простых чисел. Основным средством в рассуждениях здесь послужила дзета-функция Эйлера $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ при действительных $s>1$ и тождество Эйлера для нее, приведенное выше на с. 34, которое Чебышев логарифмирует. Он записывает функцию Эйлера в виде $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\rho}}$ и широко использует ее при $\rho\to 0$ в своих рассуждениях. При этом он проявляет высокое мастерство в сложных вычислениях, используя достаточно простые средства математического анализа в действительной области. Следствие из его теоремы 1 утверждает, что при $\rho\to 0$ и любом натуральном n выражение

$$\sum_{x=2}^{\infty}[\pi(x+1)-\pi(x)-\int_{x}^{x+1}\frac{dt}{\ln t}]\frac{\ln^n x}{x^{1+\rho}}$$

стремится к конечному предел при $\rho\to 0$. В теореме 2 утверждается, что для бесконечно многих значений x выполняются неравенства (мы пишем их в нынешних обозначениях):

$$\pi(x)>\mathrm{Li}x-\frac{\alpha x}{\ln^n x},\qquad \pi(x)<\mathrm{Li}x+\frac{\alpha x}{\ln^n x} \qquad (*)$$

при как угодно малом α и при как угодно большом натуральном n.

Чебышев доказывает эту теорему методом от противного: допускает, что существует только конечное множество значений x, удовлетворяющих неравенствам (*), и приходит к противоречию с указанным выше следствием. (Заметим, что при таком способе доказательства невозможно утверждать, что неравенства (*) выполняются для всех значений x, больших некоторого числа N).

В теореме 3 при условии, что существует предел $L=\lim_{x\to+\infty}(\ln x-\frac{x}{\pi(x)})$, доказывается с помощью неравенств (*), что $L=1$. Поэтому в формуле Лежандра для больших x (при условии существования указанного выше предела) нужно брать значение 1, а не 1,08366.

Асимптотическим законом распределения простых чисел называется равенство вида $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi(x)}{f(x)}=1$ с некоторой функцией $f(x)$. Тогда говорят, что $\pi(x)$ и $f(x)$ эквивалентны при $x\to+\infty$ и обозначают это в виде $\pi(x)\sim f(x)$ при $x\to+\infty$, а также пишут $\pi(x)=f(x)+r(x)$, где $r(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. Функция $f(x)$ называется главным членом асимптотики, а $r(x)$ – добавочным. Главный член асимптотики можно выбирать по-разному из эквивалентных выражений. Для функции $\pi(x)$ в качестве главного члена асимптотики годятся приближения Лежандра, Чебышева, Гаусса, но часто в качестве главного члена здесь берут более простую по виду, хотя и более грубую, функцию $\dfrac{x}{\ln x}$. Она, в частности, эквивалентна функции $\mathrm{Li}x=\int\limits_2^x\dfrac{dt}{\ln t}$ при $x\to+\infty$, так как по правилу Лопиталя легко получается, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{Li}x}{x/\ln x}=1$.

Из неравенства (*) Чебышева видно, что если существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi(x)}{\mathrm{Li}x}$, то он должен быть равен 1. То же касается и предела $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi(x)}{x/\ln x}$. Таким образом, Чебышев открыл асимптотический закон распределения простых чисел, хотя и не доказал его.

Подробнее доказательства приведенных выше результатов этой работы Чебышева имеются в учебнике А. К. Сушкевича «Теория чисел» (Харьков: Изд-во ХТУ, 1956, §§76–78).

Работа Римана 1859 г. посвящена доказательству закона распределения простых чисел в виде $\pi(x)=\mathrm{Li}x+r(x)$. Вслед за Чебышевым он использует дзета-функцию $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$, но не при действительных $s>1$, как Чебышев, а комплексных. Он аналитически продолжает ее в комплексную плоскость, исследует ее нули. Доказательство Римана тоже не было полным.

Строгое доказательство закона распределения простых чисел дали в 1896 г. независимо друг от друга французский математик Ж. Адамар (1865–1963) и бельгийский математик Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен (1866–1962). В 1900 г. Вале-Пуссен привел очень точную формулу $\pi(x)=\mathrm{Li}x+O(xe^{-\alpha\sqrt{\ln x}})$, $\alpha>0$. Фундаментальным во всех аналитических доказательствах асимптотического закона

для $\pi(x)$ было доказательство того, что $\zeta(1+it)\neq 0$. Уточнения дополнительного члена для $\pi(x)$ продолжались и в XX в. В 1949 г. датский математик А. Сельберг и венгерский математик П. Эрдеш дали «элементарное» доказательство асимптотического закона для $\pi(x)$, т. е. не использующее средств теории аналитических функций.

Из результатов работы Чебышева 1849 г. вытекало, что если $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi(x)}{x/\ln x}$ существует, то он должен быть равен 1. Но Чебышев не доказал существования этого предела. Поэтому в следующей работе «О простых числах» (1852) Чебышев доказывает оценку

$$0,92129<\frac{\pi(x)}{x/\ln x}<1,10555$$

при больших x, начиная с некоторого.

Большое впечатление на математиков произвело то, что в этой статье Чебышев доказал так называемый постулат Бертана: при $n>3$ содержится по крайней мере одно простое число между n и $2n-2$. Это утверждение французский математик Ж. Бертран привел в 1845 г. в качестве постулата при доказательстве одной теоремы в теории подстановок, так как не смог его доказать. Недавно это утверждение обнаружено в неопубликованных записях Л. Эйлера, приведенное им без доказательства. Чебышев в этой своей работе при доказательстве приведенной выше оценки и постулата Бертрана ввел две новые функции

$$\theta(x)=\sum_{p\le x}\ln p \qquad \psi(x)=\sum_{p^m\le x}\ln p\,.$$

В первой из них суммируются логарифмы простых чисел, не превосходящих x, а во второй – логарифмы простых чисел, натуральные степени которых не превосходят x. Для отыскания порядка их роста он очень красиво воспользовался свойствами биномиального коэффициента $C_{2n}^{n}=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$. Постулат Бертрана Чебышев доказывает с помощью своей оценки роста n-го простого числа p_n, $n=1,2,...,$ в виде

$$an\ln n<p_n<An\ln n$$

где a и A – некоторые постоянные.

Об истории вопроса о распределении простых чисел и работах П. Л. Чебышева 1849 г. и 1852 г. по теории чисел имеются подробные сведения в [120, т. 2, гл. 5] и в учебнике Ш. Х. Михеловича «Теория чисел» (М.: Высшая школа, 1967 гл. 6. – §4). В [32, с. 42–71] приведена интересная статья о распределении простых чисел: Дон Цагир. Первые 50 миллионов простых чисел. В работе «Об одном арифметическом вопросе» (1866) Чебышев с помощью цепных дробей доказал следующую теорему: существует бесконечно много систем целых чисел x и y таких, что для разности $y-ax-b$, где a и b – произвольно заданные постоянные, выполняется неравенство

$$|y-ax-b|<\frac{2}{|x|}.$$

Эта теорема впоследствии вызвала ряд работ математиков по сходным вопросам, относящимся к теории диофантовых приближений.

Работа Чебышева «О квадратичных формах» (1851) относится уже не к теоретико-функциональной, а к алгебраической теории чисел. Здесь он доказывает теорему, позволяющую с помощью представления $x^2-Dy^2=\pm N$ (N – натуральное число) узнать, является ли N простым числом. Кроме того, в таблице для D от 0 до 33 он указывает границы для x и y, где можно и как нужно применить теорему на практике. В качестве примера Чебышев доказал простоту числа 8 520 191, чего не смог сделать Лежандр, несмотря на попытки [120, т. 2, с. 193].

Кратко скажем о вкладе П. Л. Чебышева в развитие **теории вероятностей**. Интерес к этой науке появился у него уже при написании магистерской диссертации «Опыт элементарного анализа теории вероятностей» (1845). Здесь он в доступной для широкого круга читателей форме изложил основные положения теории вероятностей. Вместо интеграла вероятности он использует здесь интегральную сумму. Статья Чебышева по материалу этой работы была опубликована в журнале Крелле в 1846 г., т.е. за несколько лет до опубликования его знаменитых работ по теории чисел. Интерес к теории вероятностей у Чебышева усилился после того, как в 1860 г. В. Я. Буяновский, уходя в отставку, передал ему чтение лекций по теории вероятностей. С тех пор Чебышев опубликовал еще три работы по этой науке, представляющие важный вклад в ее развитие.

В 1867 г. в «Математическом сборнике» и в журнале Лиувилля опубликована статья Чебышева «О средних величинах». Здесь он дает формулировку закона больших чисел, включающую в себя формулировки Я. Бернулли (1713 г.) и Пуассона (1837 г.) как частные случаи. Если использовать современную терминологию, то формулировка Бернулли утверждает, что если в последовательности независимых испытаний вероятность p наступления события A постоянна, то частота $\frac{m}{n}$ наступления этого события сколь угодно мало отличается от p при достаточно большом числе испытаний n. Впрочем, Бернулли, Пуассон и Чебышев не упоминают о требовании независимости событий и случайных величин, молчаливо предполагая, что оно выполняется. Пуассон в формулировке закона больших чисел утверждал о приближенном равенстве среднего арифметического большого числа случайных величин (результатов наблюдений) среднему арифметическому их математических ожиданий. Пуассон ввел и термин «закон больших чисел». Термина «случайная величина» у Пуассона еще нет, вместо этого он говорит о вещи, которая принимает свои значения с вероятностями, соответственно, $p_1,...,p_n$.

Чебышев постоянно пользуется термином «случайная величина». В его формулировке в статье «О средних величинах» закон больших чисел (в несколько иных обозначениях) имеет вид: для последовательности случайных величин $\xi_1,\xi_2,...$ с равномерно ограниченными математическими ожиданиями $a_1,a_2,\ldots$ выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

при любом $\varepsilon > 0$.

При доказательстве этой теоремы Чебышев использовал неравенство

$$\mathrm{P}\{|\xi - \mathrm{M}\xi| \geq t\sigma\} \leq \frac{1}{t^2},$$

где $\mathrm{M}\xi$ – математическое ожидание случайной величины ξ, $\sigma = \sqrt{\mathrm{D}\xi}$ – квадратичное отклонение, $\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2$ – дисперсия. Это неравенство называют неравенством Чебышева. Оно раньше встречается в мемуаре 1853 г. французского математика и статистика И. Ж. Бьенеме, с которым Чебышев был в творческом общении.

Математики не сразу его заметили, так как в мемуаре Бьенеме это неравенство не было выделено из текста надлежащим образом [107, с. 224]. Неравенством Чебышева для случайной величины $\xi \geq 0$ называют и неравенство

$$\mathrm{P}\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathrm{M}\xi}{\varepsilon}$$

для любого $\varepsilon > 0$.

В работе «О двух теоремах относительно вероятностей» опубликованной в 1887 г. на русском языке и в журнале *Acta Mathematica* за 1890–1891 гг. на французском, Чебышев доказал так называемую центральную предельную теорему в теории вероятностей. Мы приводим ее, придерживаясь его формулировки, но в современных обозначениях:

Если (a) математические ожидания $\mathrm{M}\xi_i$ случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ равны 0, (b) математические ожидания $\mathrm{M}\xi_i^2, \mathrm{M}\xi_i^3, ..., \mathrm{M}\xi_i^k, ...,$ их последовательных степеней не превосходят по абсолютной величине какого-либо конечного предела, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{ t_1 \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i}{\sqrt{2\sum\limits_{i=1}^{n} M\xi_i^2}} \leq t_2 \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2} dx .$$

Эта теорема – крупное достижение Чебышева, несмотря на то, что условие (b) Чебышева недостаточно для проведения строгого доказательства. Он не оговаривает независимости случайных величин, а условие (b) на поведение математических ожиданий и некоторые детали доказательства требуют уточнений. Удачной идеей Чебышева было то, что в доказательстве этой теоремы он использовал так называемый метод моментов, элементы которого содержались в упомянутой выше работе Бьенеме. Необходимое уточнение в эту теорему почти сразу внес А. А. Марков (1856–1922). Большая заслуга в доказательстве центральной предельной теоремы принадлежит А. М. Ляпунову (1857–1918), вскоре заменившему довольно сложный метод моментов более простым методом характеристических функций. После этого Марков усовершенствовал и метод моментов в доказательстве этой теоремы. Он внес важный вклад в теорию чисел, а в теории вероятностей ввел схему, названную позже цепями Маркова и послужившую началом теории случайных процессов.

Скажем о вкладе П. Л. Чебышева **в теорию приближения функций**. Здесь он является основателем нового направления – теории наилучшего приближения функций. Он руководствовался запросами практики, много занимаясь теорией механизмов. Идея о том, чтобы большие отклонения в работе механических систем от допустимых сделать минимальными, привела его к открытию много членов, наименее уклоняющихся от нуля.

Впервые многочлены Чебышева появляются в его работе «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов» (1853). В то время параллелограммами в технике назывались шарнирные механизмы, состоящие из нескольких зеньев. Такой механизм применил Уатт в паровых машинах.

До Чебышева для функций $f(x)$ и $g(x)$, заданных на отрезке $[a,b]$, величину их отклонения друг от друга рассматривали как функцию $r(x) = |f(x) - g(x)|$ на отрезке $[a,b]$. При разработке теории наилучшего приближения функций Чебышев для непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$, заданных на отрезке $[a,b]$, вводит их отклонения друг от друга как число

$$d(f,g) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

В настоящее время говорят, что это чебышевская метрика (расстояние) между функциями f и g в пространстве $C_{[a,b]}$ непрерывных функций, или равномерное отклонение функций f и g друг от друга. Число

$$d(f,0) = \max_{[a,b]} |f(x)|$$

Чебышев называет уклонением функции f от нуля (т. е. от функции $g(x) \equiv 0$ на отрезке $[a,b]$, графически совпадающей с отрезком $[a,b]$). В настоящее время это число называют чебышевской нормой функции f и обозначают $\|f\|$, или $\|f\|_{[a,b]}$.

Очень важную роль в теории наилучшего приближения функций играют многочлены Чебышева первого рода

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \frac{1}{2}[(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n],$$

где $x \in [-1,1]$, $n = 0,1,2,\dots$.

Они удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

Несколько первых многочленов $T_n(x)$ имеют вид

$$T_0 = 1,\ \ T_1(x) = x,\quad T_2(x) = 2x^2 - 1,\quad T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,\quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

Очевидно, что $|T_n(x)| \le 1$ и $T_n(1) = 1$, поэтому $\|T_n\| = 1$.

При $n \ge 1$ старший коэффициент многочлена $T_n(x)$ (т. е. коэффициент при x^n) имеет вид $a_0 = 2^{n-1}$. Чебышев вводит многочлены

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x),\quad n \ge 1,\quad x \in [-1,1],$$

для них $\left\|\tilde{T}_n(x)\right\| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$, а старший коэффициент равен 1. Многочлены Чебышева $\tilde{T}_n(x)$ – это так называемые многочлены, «наименее уклоняющиеся от нуля» на отрезке $[-1,1]$. Это означает, что при $x \in [-1,1]$ для всякого алгебраического многочлена $P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ со старшим коэффициентом 1 выполняется неравенство

$$\left\|\tilde{T}_n\right\| < \left\|P_n\right\|.$$

Многочленами Чебышева второго рода называются многочлены

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1 - x^2}},\quad x \in (-1,1),\quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Как видно, $U_n(x) = \dfrac{1}{n+1} T'_{n+1}$. (Иногда многочленами Чебышева второго рода называются выражения $\sin(n \arccos x)$).

Многочлены Чебышева принадлежат к классу ортогональных многочленов ($T_n(x)$ – с весом $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, а $U_n(x)$ – с весом $\sqrt{1 - x^2}$), т. е. для них при $m \ne n$ выполняются соотношения

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = 0,\qquad \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, U_m(x) U_n(x) dx = 0.$$

Подробнее с многочленами Чебышева можно познакомиться в учебном пособии: Кузнецов Д. С. Специальные функции. – М.: Высшая шк., 1965. – §§54, 55; а

также в научно-популярной книге: Данилов Ю. А. Многочлены Чебышева. – Минск: Вышэйная шк., 1984. – 157 с.

Вопросам наилучшего приближения функций посвящена большая теоретическая работа Чебышева «Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций» (1857). Здесь он ставит общую задачу наилучшего приближения функций: функцию $F(x)$ данного вида, содержащую n произвольных параметров $p_1,...,p_n$ сделать наименее уклоняющейся от нуля на отрезке $[-h,h]$, выбирая ее параметры соответствующим образом. Сначала он доказывает общую теорему о необходимых и достаточных условиях, при которых это возможно, а затем применяет ее к трем случаям, когда функция $F(x)$ представляет собой: 1) алгебраический многочлен, 2) рациональную функцию определенного вида, 3) дробную рациональную функцию определенного вида. Первый случай был рассмотрен уже в работе 1853 г., где Чебышев ввел свои многочлены, но теперь он находит их по-иному, с помощью непрерывных (т. е. цепных) дробей, и применяет их в теории интерполяции. Вообще основным методом решения задач о наилучшем приближении функций Чебышев считает метод непрерывных дробей. В дальнейшем он неоднократно обращался к теории наилучшего приближения функций (в работах 1871, 1873, 1881, 1893 гг. и др.). Его работы по этой тематике стали основой для создания конструктивной теории функций, основным представителем которой в советское время был академик С. Н. Бернштейн.

В вычислительной математике широко применяется интерполирование – приближенное представление функции $f(x)$ по известным ее значениям $f(x_i)$ в отдельных точках $x_0 < x_1 < ... < x_n$ (узлах интерполяции). Чебышеву принадлежит ряд работ по интерполированию функций, в частности с использованием его многочленов в интерполяционной формуле Лагранжа [197, т. 2, с. 632]. В заметке «Об одной формуле анализа» (1854) он приводит свою интерполяционную формулу, отличающуюся от формулы Лагранжа. Далее следует его важная работа «О непрерывных дробях» (1855), где он, в частности, доказывает эту свою формулу. Затем выходят его работы «Об интерполировании по способу наименьших квадратов» (1859), «Об интерполировании» (1864), «Об интерполировании величин равноотстоящих» (1875) и др.

В математическом анализе П. Л. Чебышев сделал крупный вклад в теорию интегрирования.

В 1844 г. в журнале Крелле была опубликована небольшая «Заметка о сходимости ряда Тейлора». Это единственная работа Чебышева, относящаяся непосредственно к теории функций комплексного переменного. Заметка молодого Чебышева была направлена против утверждения Коши о том, что сходящийся ряд из непрерывных функций можно почленно интегрировать. Чебышев заметил, что это не всегда так, и что это можно делать, если исходный ряд сходится равномерно. Заметим, что это было до того, как Зейдель (в 1847 г.) и Стокс (в 1848 г.) ввели свои понятия равномерной сходимости ряда, а Коши (в 1853 г.) – входящее в настоящее время в учебники математического анализа. Но, примененное Чебышевым в частном вопросе, оно тогда еще не получило распространения. Как отмечалось выше, широко пользовался равномерной сходимостью Вейерштрасс в своих лекциях.

Ряд работ Чебышева посвящен вопросам интегрирования алгебраических функций, содержащих иррациональные выражения, в конечном виде, т. е. в элементарных функциях. Первой из них была его диссертация «Об интегрировании с помощью логарифмов» (1847) на право чтения лекций в Петербургском университете.

Из исследований Абеля (1823 г.) и Лиувилля (1834 г.) для интегралов вида

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\sqrt{\Theta(x)}} \qquad (1)$$

где $\frac{f(x)}{F(x)}$ – несократимая рациональная дробь, а $\Theta(x)$ – многочлен, не имеющий кратных корней, было известно, что если такой интеграл выражается в элементарных функциях, то результат состоит из алгебраической части $\frac{\Phi(x)}{\Phi_1(x)}\sqrt{\Theta(x)}$ и логарифмической части $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{A}_i \ln \frac{p_i + q_i\sqrt{\Theta(x)}}{p_i - q_i\sqrt{\Theta(x)}}$, где $\frac{\Phi(x)}{\Phi_1(x)}$ – рациональная функция, а p_i и q_i – многочлены, $i = 1,...,k$. Но условия, при которых это имеет место, а также методы получения результата требовали уточнения и улучшения. Некоторые утверждения Абель оставил без доказательства. Этим вопросом в случае отсутствия алгебраической части интеграла была посвящена указанная выше диссертация

Чебышева. Она была напечатана только в 1930 г., так как была перекрыта дальнейшими его работами.

Первой основательной работой Чебышева по теории интегрирования была работа «Об интегрировании иррациональных дифференциалов», опубликованная в журнале Лиувилля в 1853 г. Для интегралов вида

$$\int \frac{f_0(x)}{F_0(x)} \frac{dx}{\sqrt[m]{\Theta(x)}} \qquad (2)$$

где $f_0(x)$, $F_0(x)$, $\Theta(x)$ – многочлены, $m \geq 2$ – натуральное число, здесь выясняются условия, при которых интеграл выражается в конечном виде, приводятся результаты интегрирования, в частности, обобщаются результаты, полученные в диссертации при $m = 2$. Отметим очень важный частный результат этой работы, ставший классическим и выдвинувший молодого Чебышева в число выдающихся математиков. В курсах математического анализа, в частности, рассматриваются интегралы $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ (m, n, p – рациональные числа), называемые интегралами от биномиальных дифференциалов, и доказывается, что они выражаются в элементарных функциях в следующих трех случаях: 1) p – целое, 2) $\frac{m+1}{n}$ – целое, 3) $\frac{m+1}{n} + p$ – целое. Эти три случая были известны уже Ньютону и Эйлеру, но не было известно, нет ли здесь других случаев интегрируемости. Большой заслугой Чебышева было доказательство утверждения, что только в этих трех случаях биномиальные дифференциалы интегрируются в элементарных функциях. (Мы привели современные обозначения показателей, у Чебышева были другие обозначения.)

Затем последовали три работы Чебышева об интегралах вида (1), в частности эллиптических: «Об интегрировании дифференциалов, содержащих квадратный корень из многочлена третьей или четвертой степени» (1857), «Об интегрировании иррациональных дифференциалов» (1860), «Об интегрировании дифференциала

$$\frac{(x+A)dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}} \text{» (1861)}. \qquad (3)$$

Эти работы являются продолжением работы Чебышева «Об интегрировании иррациональных дифференциалов» (1853). Вейерштрасс и Эрмит прочли работу Чебышева 1857 г., опубликованную в журнале Лиувилля. Вейерштрасс откликнулся

на эту работу статей «Об интегрировании алгебраических дифференциалов посредством логарифмов» (1857). Здесь он говорит о работе Чебышева 1857 г. и выражает интеграл

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}},$$

где $f(x)$ – рациональная функция, через логарифмы, используя в промежуточных вычислениях подстановку $x = \mathrm{sn}^2 u$ и некоторые из результатов Якоби [132, с. 205–207].

В своих работах по интегрированию Чебышев ссылается на теорему Абеля о том, что интегралы вида (1) выражаются в элементарных функциях тогда и только тогда, когда выражение $\sqrt{\Theta(x)}$, где $\Theta(x)$ – многочлен, разлагается в периодическую непрерывную (цепную) дробь. Но этот критерий на практике трудно проверить, если цепная дробь имеет длинный период. Чебышев в указанной выше работе 1857 г. приводит без доказательства свой метод, позволяющий с помощью конечного числа алгебраических действий узнать, при каких рациональных $A, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ выражение (3) интегрируется в элементарных функциях. Эрмит в письме к Чебышеву 1858 г. пишет, что Вейерштрасс в 1857 г. в Докладах Берлинской АН вместо «алгебраического» метода Чебышева дал свой «трансцендентный» (с использованием эллиптических функций), указав для одного канонического вида эллиптических интегралов очень простой способ выражения в элементарных функциях. Эрмит советует Чебышеву обратить внимание на эллиптические функции. Но Чебышев, будучи верен своему «алгебраическому» методу, предложил своему ученику Е. И. Золотареву исследовать вопрос об интегрировании дифференциалов вида (3) в конечном виде (т. е. в элементарных функциях) с помощью эллиптических функций. Золотарев сделал это в своей работе «О методе интегрирования Чебышева», а в докторской диссертации (1874 г.) обобщил метод Чебышева на случай несоизмеримых коэффициентов в выражении (3) [126, с. 133–134, 226–228]. Чебышев не очень любил переписку, но с Эрмитом переписывался, сохранилось 10 писем Эрмита к Чебышеву. Эллиптические функции, а именно функции Якоби, Чебышев использовал, по-видимому, только в одной работе в конце жизни, применив их к приближенному вычислению интегралов. Она была опубликована в журнале *Acta mathematic*.

Две работы (1865 и 1867 гг.) Чебышев посвятил вопросам об интегрируемости в элементарных функциях интегралов, содержащих кубический корень, а именно интегралов вида (2) при $m = 3$, где $F_0(x) \equiv 1$, $f(x)$ и $\Theta(x)$ – многочлены, в частности $\Theta(x) = x^3 + ax + b$. Здесь теорема Абеля и цепные дроби не действуют, Чебышев дает свой метод.

В 1882 г. Чебышев доказал для монотонных неотрицательных функций на отрезке $[a,b]$ неравенство

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \le (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx ,$$

а для монотонных неотрицательных конечных последовательностей чисел – неравенство

$$\sum_{k=1}^n a_k \sum_{k=1}^n b_k \le n \sum_{k=1}^n a_k b_k .$$

Эти неравенства носят его имя.

Для приближенного вычисления определенных интегралов Чебышев предложил свою весьма оригинальную квадратурную формулу [13, с. 629; 120, т. 2, с. 204–205]. Она была приведена в его статье в журнале Лиувилля в 1874 г.

В вычислительной математике Чебышеву принадлежит также носящий его имя метод получения итерационных алгоритмов (последовательных приближений) для нахождения однократного действительного корня уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ – достаточно гладкая функция. Основой этого метода служит формальное представление обратной к $y = f(x)$ функции $x = F(y)$ по формуле Тейлора [197, т. 5, с. 840]. Развитием метода Чебышева является чебышевский итерационный метод, применяемый с середины XX в. в линейной алгебре для приближенного решения линейного уравнения $Ax = b$, где A – матрица или, вообще, самосопряженный линейный оператор. В простейшем варианте это делается по формуле

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_{k+1}(Ax^k - b), \quad k = 0,1,...,N-1,$$

где α_{k+1} – параметры [13, с. 630].

В дифференциальной геометрии известны чебышевские сети на поверхности в трехмерном пространстве, введенные Чебышевым в работе «О кройке платья»

(1878) при разработке метода оптимального раскроя одежды [126, с. 137–138; 197, с. 847]. Он предложил и удобный метод построения географических карт.

На протяжении своей жизни Чебышев много занимался вопросами **теории механизмов и их конструированием**. Он написал по этим вопросам около 15 работ и является одним из главных основоположников теории машин и механизмов. Чебышев построил несколько десятков механизмов, в том числе арифмометр с непрерывным передвижением цифр, гребной механизм для лодки, самокатное кресло и др. За некоторые из своих изобретений он удостоился медалей на всемирных выставках в Париже (1878) и Чикаго (1893).

О Чебышеве: [126; 120, т. 2, гл. 5; 259; 107, с. 160–166, с.21–229; 260; 197, т. 5, с. 839–851; 127; 128; 261; 5, с. 417–426; 196; 290, с. 351–354; 13, с. 629–630; 14–17; 109, с. 1].

Возникновение новых направлений в алгебре XIX века

До середины XIX в. развитие алгебры шло медленно по сравнению с бурным развитием математического анализа, включающим и комплексный анализ. В XVIII в. алгебра была наукой о способах решения алгебраических уравнений, в том числе диофантовых, а с середины XVIII в. – и систем линейных уравнений. В первой половине XIX в. алгебра была еще преимущественно наукой об алгебраических многочленах, посвященной вопросам о разрешимости алгебраических уравнений, исследованию квадратичных форм и др., но лицо ее постепенно менялось.

Новый этап в развитии алгебры начинается примерно с середины XIX в. Он был подготовлен работами Лагранжа, Гаусса, Абеля, Галуа и Коши в области алгебры. После работ Гаусса комплексные числа были безоговорочно признаны в математике и получили дальнейшие обобщения. Были разработаны теории: определителей, квадратичных форм, матриц. Возникает линейная алгебра. Зародившись при изучении подстановок и других объектов, возникает абстрактная теория групп. Изучение различных числовых систем, в частности алгебраических чисел, привело к возникновению в алгебре новых структур – колец, полей и др. Таким образом, к концу XIX в. создается основа для абстрактной алгебры XX века.

1. **Возникновение линейной алгебры.**

Линейная алгебра – это раздел алгебры, в котором изучаются векторные (линейные) пространства и их подпространства, линейные операторы (линейные отображения), системы линейных уравнений, квадратичные формы, линейные и билинейные формы на векторных пространствах и др. Она возникла в XIX в. главным образом в результате синтеза теории решения систем линейных уравнений и аналитической геометрии в n-мерном пространстве. Исторически первым разделом линейной алгебры была теория линейных систем алгебраических уравнений. Уже в 1750 г. швейцарский математик Г. Крамер (1704–1752) получил правило решения системы n линейных уравнений с n неизвестными и определителем, отличным от нуля. Около 1770 г. французский математик А. Т. Вандермонд формулирует ряд основных свойств определителей. Коши в работе 1815 г. об определителях дает уже весьма полную их теорию, рассматривая определитель как функцию от n^2 переменных, расположенных в квадратной таблице. Коши ввел в этой теории и термин «определитель (детерминант)». В 1849 г. Гаусс предложил свой метод решения систем линейных уравнений.

Одним из разделов линейной алгебры является теория квадратичных форм. Такие формы изучались в аналитической геометрии в связи с кривыми и поверхностями 2-го порядка и в теории чисел в связи с представлением натуральных чисел квадратичными формами. Вскоре кривые и поверхности 2-го порядка рассматривались уже и в n-мерном пространстве (квадрѝки). Задача определения вида кривых и поверхностей 2-го порядка решается путем приведения квадратичной формы к каноническому виду. Поэтому в XIX в. квадратичные формы (однородные многочлены второй степени уже и от n переменных) становятся самостоятельными объектами изучения. Свойства квадратичных форм изучал в XVIII в. Лагранж, а в XIX в. – Гаусс, Якоби, Сильвестр и другие математики.

Одним из разделов линейной алгебры является теория матриц. Числовые таблицы использовались с незапамятных времен (таблицы умножения, магические квадраты и др.). Однако матрицы как квадратные или прямоугольные таблицы, которые можно определенным образом складывать и умножать, появились лишь в XIX в. Умножение матриц возникло в связи с линейными преобразованиями

пространства. Неявно операция умножения матриц имеется уже у Эйлера в работе 1771 г., где он рассматривает поворот евклидовой системы координат. Квадратную таблицу из коэффициентов этого преобразования, т. е. матрицу $A = (a_{ik})$, но в других обозначениях, он называет просто «квадратом» и указывает (в координатной записи) характерное свойство матрицы поворота – условие ортогональности, которое мы кратко записываем в виде $A^{\mathsf{T}} A = E$, где A^{T} – матрица, транспонированная к A, а E – единичная матрица.

Гаусс, имея дело с линейным преобразованием вида $y_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k$, $i = 1,2,3$, рассматривает квадратную таблицу, т. е. матрицу (a_{ik}) этого преобразования, и обозначает ее одной буквой S. Далее он выписывает результат последовательного применения двух таких преобразований S и S_1 в виде квадратной таблицы, которая, как мы говорим, является произведением матриц S и S_1. Но он не вводит никакого термина для таких таблиц и не исследует свойств умножения матриц, хотя раньше он исследовал трудно проверяемые свойства композиции классов квадратичных форм.

Британская математическая школа, возродившаяся в 40-х гг. XIX в. после почти векового застоя, внесла тогда существенный вклад и в развитие алгебры. Главными ее представителями в области алгебры были англичане А. Кэли, Дж. Дж. Сильвестр и ирландец У. Р. Гамильтон. В 40–50-х гг. XIX в. они уже пользуются матрицами, но пока еще без операций над ними. Сам термин «матрица» был введен в 1850 г. Сильвестром якобы потому, что матрица порождает линейное преобразование (латинское слово *matrix* означает «матка (живатного), источник, начало»). Новым этапом в развитии линейной алгебры явилась работа А. Кэли «Мемуар о теории матриц» (1858), где он вводит для квадратных матриц одного порядка операции сложения и умножения, а также умножение матрицы на число. В [2, с. 117–118] приведен отрывок из этой работы. Квадратную матрицу 3-го порядка он там записывает в виде

$$\begin{matrix} (a, & b, & c) \\ \left| \begin{matrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix} \right| \end{matrix},$$

а соответствующее ей линейное преобразование – в виде

$$(X,Y,Z) = (a,b,c)(x,y,z)$$

$$\begin{vmatrix} a',b',c' \\ a'',b'',c'' \end{vmatrix} .$$

Там же Кэли впервые отмечает, что при умножении «матрицы, вообще говоря, не перестановочны». Далее он пишет: «возможно образовывать степени (положительные и отрицательные, целые и дробные) матриц и таким образом достичь понятия рациональной и целой функции или вообще любой алгебраической функции от матрицы». Там же Кэли формулирует в общем виде теорему, которую ныне называют теоремой Гамильтона–Кэли: всякая квадратная матрица A порядка n удовлетворяет своему характеристическому уравнению $\det(A-\lambda E)=0$, где E – единичная матрица порядка n. Кэли доказывает ее для матриц порядка $n=2,3$; ранее (в 1853 г.) ее доказательство при $n=2$ и 3 привел Гамильтон.

В [23, с. 32] написано, что «обозначения – вертикальные линии для определителя, две вертикали – для матрицы – ввел Кэли (1841)», а на с. 74 – о том, что круглые скобки в обозначении матрицы ввел английский математик Калис (1913).

Матрицы нашли применение прежде всего в вопросе о совместности системы линейных алгебраических уравнений. Критерий их совместности дает теорема Кронекера–Капелли, названная по имени немецкого математика Л. Кронекера (1823–1891), профессора Берлинского университета, и итальянского математика А. Капелли (1855–1910), профессора университетов в Палермо и Неаполе. У Кронекера она имеется в лекциях, читанных в 1883–1891 гг. Но первым доказательство этой теоремы опубликовал в 1867 г. английский математик и логик Ч. Л. Доджсон (1832–1898), профессор Оксфордского университета, автор знаменитых повестей «Алиса в стране чудес» (1865) и «Алиса в Зазеркалье» (1878), писавший под псевдонимом Льюис Кэрролл. Вместо термина «ранг матрицы» он говорит о наибольшем из порядков отличных от нуля миноров. Термин «ранг матрицы» был введен позже немецким математиком Ф. Г. Фробениусом (1849–1917) от немецкого слова *Rang* – «чин», «разряд». Кронекер в 1880 г. использует термин «ранг определителя». Кронекер и Капелли в теореме, носящей их имя, используют термин «ранг матрицы».

Корни характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$ матрицы A называются собственными значениями (собственными, или характеристическими числами)

матрицы A. Характеристическое уравнение естественно возникает в теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами. Линейная однородная система $\frac{dx}{dt} = Ax$, где A – постоянная матрица, с помощью замены $x = ae^{\lambda t}$ переводится в алгебраическую: $Aa = \lambda a$. Таким образом, приходим к характеристическому уравнению $\det(A - \lambda E) = 0$ для матрицы A. Этот метод обычно называют методом Эйлера, так как он в 1743 г. с помощью замены $x = e^{\lambda t}$ впервые приводил линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка к алгебраическому уравнению, которое является характеристическим для исходного дифференциального уравнения. Позже Лагранж и Лаплас имели дело с характеристическим уравнением при решении дифференциальных уравнений механики в теории малых колебаний, а также при исследовании так называемых «вековых неравенств» в движении планет, из-за чего характеристическое уравнение раньше называли «вековым уравнением». Собственные значения присутствуют в скрытом виде еще раньше у Эйлера при нахождении осей кривых и поверхностей 2-го порядка и главных осей инерции твердого тела. Коши в 1826 г. рассматривал характеристическое уравнение для симметрической матрицы квадратичной формы $\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}x_i x_k$, $a_{ik} = a_{ki}$, приводя эту форму к каноническому виду. Здесь он показал, что собственные значения симметрической матрицы действительны и что они инвариантны относительно преобразования подобия. Через три года он обобщил эти результаты на действительные симметрические матрицы порядка n.

В связи с классификацией квадрѝк (гиперповерхностей 2-го порядка) Вейерштрасс в работе «К теории билинейных и квадратичных форм» (1868) находит канонические формы «пучка» $U + \lambda V$, где U и V – квадратные матрицы порядка n такие, что $\det(U + \lambda V) \neq 0$. Для этого он разработал теорию элементарных делителей матрицы A, т. е. одночленов вида $(\lambda - \lambda_i)^{k_{ij}}$, связанных с матрицей A, где λ_i – собственные значения матрицы A. Матрица B называется подобной матрице A, если существует невырожденная матрица S такая, что $B = S^{-1}AS$. Вейерштрасс показал, что для подобия матриц необходимо и достаточно, чтобы они имели одни и те же

элементарные делители. Знание элементарных делителей матрицы A дает возможность записать канонический вид матрицы A, т. е. указать подобную ей матрицу, имеющую блочно-диагональный вид, где блоки представляют собой «клетки Жордана». Эти результаты частично вновь были найдены Жорданом, по-видимому независимо от Вейерштрасса, и включены в «Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях» (1870), получивший широкую известность. Классификацию линейных преобразований с различными жордановыми формами отвечающих им матриц провел итальянский математик Коррадо Сегре (1863–1924) из Туринского университета в своей работе 1884 г.

Предметом линейной алгебры уже в XIX в. стало изучение линейных преобразований конечномерных векторных пространств и отвечающих этим преобразованиям матриц. Линейное преобразование A – это отображение векторного пространства V в себя такое, что для любых x, y из V и любого числа λ из поля K, над которым рассматривается V, выполнены равенства $\mathsf{A}(x+y)=\mathsf{A}x+\mathsf{A}y$, $\mathsf{A}(\lambda x)=\lambda\mathsf{A}x$.

При формировании линейного (векторного) пространства алгебра тесно смыкалась с геометрией. Основой послужило понятие вектора. Первое векторное исчисление на плоскости построил в 1835 г. итальянский геометр Дж. Беллавитис, профессор математики в Падуе. В его исчислении объектами операций служили направленные отрезки. Проникновение векторов в алгебру связано и с геометрической интерпретацией комплексных чисел. Арган в 1806 г. обозначал направленный отрезок с черточкой над буквой. Выше говорилось о формировании на стыке алгебры и геометрии понятия n-мерного пространства. Книги немецкого математика Г. Грассмана «Учение о линейном протяжении» (1844) и «Учение о протяжении» (1862) содержат уже и элементы векторной алгебры. О Грассмане мы писали выше на с. 6–8. Он ввел единичные векторы e_1, e_2, e_3, направленные по осям координат, и представление вектора в виде $x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$, а в n-мерном пространстве – в виде $\sum_{i=1}^{n} x_ie_i$, где e_i – элементы базиса (но в другой терминологии). В книге 1862 г. у него уже есть скалярное («внутреннее») и векторное («внешнее») произведение векторов. Обобщая понятие векторного произведения на n-мерный случай, он строит свою алгебру внешних форм. Там же он дает определение линейной

независимости векторов, размерности пространства и приводит формулу для размерности суммы пространств:

$$\dim(V+W)=\dim V+\dim W-\dim(V\cap W)$$

(в других обозначениях). Но результаты Грассмана, изложенные сложно, не были поняты его современниками.

Широкую известность в то время получили две работы ирландского математика У. Р. Гамильтона (1844–1850 и 1853 гг.) о кватернионах, т. е. числах вида $a+bi+cj+dk$, обобщающих комплексные числа. Здесь Гамильтон (независимо от Грассмана) дает понятие вектора (из понятия кватерниона при $a=0$), а также понятие скалярного и векторного произведений. Гамильтон ввел в 1845 г. термин «вектор» от латинского слова *vector* – «несущий».

Частое использование в математике таких объектов, которые можно складывать и умножать на числа (функции, векторы, матрицы и др.) постепенно привело к понятию линейного (векторного) пространства над полем K, т. е. множества V, состоящего из элементов любой природы (называемых векторами), в котором определена операция сложения векторов и операция умножения векторов на числа поля K, причем V представляет абелеву (т. е. коммутативную) группу по сложению векторов, а операция умножения вектора на числа из K удовлетворяет условиям:

$$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y,\quad (\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x,\quad (\lambda\mu)x=\lambda(\mu x),\quad 1\cdot x=x$$

для любых $x,y\in V$ и $\lambda,\mu\in K$.

В качестве векторных пространств в алгебре и геометрии XIX в. использовались главным образом пространства $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Бесконечномерные линейные пространства стали рассматриваться в функциональном анализе во время его становления в 20–30 гг. XX в. Впрочем, уже в работе 1896–1897 гг. итальянский математик С. Пинкерле рассматривает «функциональное пространство» (его термин) всех аналитических функций одной переменной, в котором элементами («точками») служат эти функции, а координатами точки – коэффициенты степенного ряда для функций. Он рассматривает и линейные операторы в этом пространстве, для которых находит множества, получившие позже название спектра оператора.

Современное определение линейного оператора $L: V \to W$ впервые дал в 1888 г. итальянский математик Дж. Пеано (1858–1932) для случая $K = \mathbb{R}$. Оно такое же, как и для линейного преобразования (см. выше), но L отображает векторное пространство V, вообще говоря, в другое векторное пространство W.

2. **Возникновение и начало развития теории групп.**

Первоначально теория групп развивалась в виде групп подстановок в связи с вопросом о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Лагранж в 1770 г. разбивает группу подстановок S_n на смежные классы по подгруппе и показывает, что смежные классы имеют тот же порядок (т. е. число элементов), что и подгруппа, причем либо совпадают, либо не пересекаются. Отсюда он получает свою теорему: порядок подгруппы является делителем порядка группы. Эта теорема справедлива для любой конечной группы.

У Гаусса имеются примеры циклических и некоторых других групп. Самым интересным его примером группы в «Арифметических исследованиях» (1801) является группа классов эквивалентных бинарных квадратичных форм $ax^2 + 2bxy + cy^2$ ($a, b, c, x, y \in \mathbb{Z}$). Он проверяет все групповые свойства операции (композиции классов) в этой группе.

Коши в ряде мемуаров детально изложил теорию групп подстановок и исследовал их циклические подгруппы.

Термин «группа» впервые появился в работе Галуа «Из теории чисел. Часть исследований по теории перестановок и алгебраических уравнений» (1830). Он ввел его только для подстановок следующим образом: «Если в подобной группе имеются подстановки S и T, то есть уверенность в подстановке ST». Таким образом, Галуа определил групповую операцию как умножение (композицию) подстановок. Но он не формулирует групповых свойств (аксиом группы), для групп подстановок они выполняются автоматически. Словом «группа» он называл и смежные классы группы по ее подгруппе, которые не являются группами в современном смысле. Важной заслугой Галуа является то, что он первым пришел к понятию нормальной (инвариантной) подгруппы, или нормального делителя. В «Мемуаре об условиях разрешимости уравнений в радикалах», написанном в 1830 г. и опубликованном в

1846 г., он дает критерий разрешимости алгебраических уравнений в радикалах, введя некоторую группу подстановок их корней, названную впоследствии его именем (см. например, очерк о Галуа в [289]).

Общее определение группы дал выдающийся английский математик **Артур Кэли (1821–1895)**, сыгравший большую роль в становлении новых направлений в алгебре. Он родился в г. Ричмонд в семье состоятельного купца, детство и юность провел в Петербурге, где в это время жил его отец. В 1838–1841 гг. Кэли обучается в Кембриджском университете. С 1843 г. он в течение 20 лет работает адвокатом и в то же время усиленно занимается математикой и публикует свои результаты, а с 1863 г. исполняет обязанности профессора математики в Кембриджском университете. Опубликованные им около 200 работ были изданы в 13 томах.

Главные результаты Кэли относятся к алгебраической геометрии, линейной алгебре и теории групп. Он ввел понятие «абстрактной группы», создал алгебру матриц, занимался теорией инвариантов, теорией эллиптических функций.

Кэли в работе «О теории групп, связанных с символическим уравнением $\theta^n = 1$» (1854) первым вводит понятие «абстрактной» конечной группы, т. е. группы с конечным числом элементов произвольной природы, в виде: «Множество символов $1, \alpha, \beta, \ldots$, различных между собой и таких, что произведение любых из них (не важно, в каком порядке взятых) или произведение любого из них на самого себя принадлежит этому множеству, называется группой» [2, с. 115–117]. Он не дает аксиоматического определения группы (у него не постулируются существование обратного элемента и ассоциативность). Группа задается у него в виде таблицы умножения (таблица Кэли). В качестве примеров Кэли задает таблицами 7 групп: две порядка 6 и пять порядка 8 (три коммутативные и две некоммутативные). Он указывает и некоторые другие примеры групп (множества матриц, кватернионов, корней n-й степени из единицы), а также формулирует несколько элементарных утверждений для конечных групп. Имя Кэли носит теорема: всякая конечная группа изоморфна некоторой группе подстановок.

Важную роль в распространении идей теории групп и ее развитии сыграл французский математик **Камилл Мари Эдмон Жордан (1838–1922)**. Он окончил Политехническую и Горную школы в Париже, работал в Политехнической школе и Коллеж де Франс. Основные его работы посвящены математическому анализу,

алгебре (теория групп и матриц), теории чисел, механике. Его «Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях» (1870) содержит систематическое, уточненное и дополненное изложение теории Галуа (см. в [289] очерк о Галуа). Здесь Жордан ввел понятие факторгруппы, нормального ряда, разрешимой группы, а также доказал часть так называемой теоремы Жордана–Гёльдера об изоморфизме композиционных рядов группы. В 1868 г. провел классификацию групп движений трехмерного евклидова пространства. Он пытался найти все разрешимые конечные группы, начал исследовать и бесконечные группы. В «Трактате» Жордан привел и свои результаты по приведению матриц к блочно-диагональному виду, где блоки представляют «клетки Жордана», раньше их получил .Вейерштрасс.

Кроме теории решения алгебраических уравнений и теории чисел, источником новых групп вскоре стала и геометрия. Группы геометрических преобразований ввел в рассмотрение немецкий математик **Феликс Клейн (1849–1925)**. Он родился в Дюссельдорфе в семье чиновника финансового ведомства. Окончил университет в Бонне и еще будучи студентом стал ассистентом одного из основателей проективной геометрии – Юлиуса Плюккера (1801–1868). В 1870 г. Клейн вместе с будущим выдающимся норвежским математиком Софусом Ли (1842–1899) находился в Париже на научной стажировке у Жордана. С тех пор Клейна и Ли связывала многолетняя дружба, а также общий интерес к теории групп. Клейн работал профессором математики в Эрлангене, Мюнхене, 12 лет – в Лейпцингском университете, а с 1888 г. – в Гёттингенском.

В 1872 г. Клейн выразил свой групповой подход к геометрии. Он вел интенсивные математические исследования в 1869–1882 гг., напряженно соревнуясь под конец этого периода с французским математиком Анри Пуанкаре (1854–1912) в разработке теории автоморфных функций – однозначных аналитических в верхней полуплоскости (или в круге) функций $f(z)$, инвариантных относительно дискретных групп $\{T_n(z)\}$ дробно-линейных преобразований, где $T_n(z) = \dfrac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}$, $T_0(z) = z$, $a_n d_n - b_n c_n \neq 0$, $f(T_n(z)) = f(z)$. (Если $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{Z}$ и $a_n d_n - b_n c_n = 1$, то такие функции называются модулярными.) Напряженная работа отразилась на здоровье Клейна – развилась болезнь (астма), вынудившая его прекратить научные исследования. Но он проявляет активную деятельность иного рода: редактирует

журнал *Mathematische Annalen*, который вскоре под его руководством занял ведущее место в мире; издает свои лекции и исследования по теории автоморфных функций (совместно с Фрике, 4 тома) и по теории волчка (совместно с Зоммерфельдом, 4 тома). Он руководит работой над изданием огромной «Энциклопедии математических наук»; организует «Международную комиссию по преподаванию математики» и ряд ее конгрессов. Клейн первым взялся за описание истории математики XIX в. в своей книге [140]. Под его руководством осуществлено 12-томное издание трудов Гаусса.

Если в первом десятилетии XIX в. все (кроме Гаусса) были убеждены в уникальности евклидовой геометрии, то вскоре положение изменилось. Возникли неевклидовы геометрии (гиперболическая у Лобачевского и Бояи, эллиптическая у Римана), а также общая риманова геометрия. Начиная с Понселе, бурно развивалась проективная геометрия, ее независимость от евклидовой была установлена фон Штаудтом. Возник вопрос об общем подходе к описанию всех геометрий.

Первую попытку в этом направлении сделал Кэли в «Шестом мемуаре о формах» (1859). На проективной плоскости он фиксирует «абсолют» – какую-нибудь кривую 2-го порядка (она может быть и мнимой). Затем он вводит так называемую «проективную метрику Кэли» для длины отрезка и угла между прямыми. Эта метрика не меняется (инвариантна) при проективных преобразованиях, так как вводится через инвариант проективного преобразования – двойное отношение четырех точек на прямой. В пространстве в качестве «абсолюта» берется поверхность 2-го порядка. Выбирая разные абсолюты, можно получать различные геометрии. Взяв в качестве абсолюта мнимую окружность сфер, Кэли из проективной геометрии получает евклидову. На этом пути были получены интерпретации Клейна и Пуанкаре геометрии Лобачевского (см. в [289] очерк о Лобачевском).

Клейн выразил единый групповой подход к геометрии в своей лекции, прочитанной в 1872 г. при вступлении на должность профессора Эрлангенского университета. В том же году она была напечатана под названием «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований» и в дальнейшем получила название «эрлангенской программы» Клейна, с ней можно ознакомиться по сборнику [195].

Согласно Клейну, ту или иную геометрию задает группа (или несколько групп) преобразований плоскости или пространства. Дано «многообразие» (n-мерное пространство точек согласно Клейну, $n \geq 2$) и в нем группа преобразований, переводящая его в себя. Нужно исследовать те свойства объектов (линий, фигур), принадлежащих «многообразию», которые не меняются под действием группы преобразований. Иными словами, «требуется развить теорию инвариантов данной группы», действующей в «многообразии». Клейн подчеркивает общность этого подхода в геометрии и классифицирует геометрии по тем группам преобразований, которые в них используются.

Евклидова геометрия на плоскости характеризуется группами преобразований: 1) параллельный перенос; 2) поворот вокруг начала координат; 3) зеркальное отражение; 4) подобие. Все эти преобразования сохраняют углы между прямыми и форму фигур, а преобразования 1–3 сохраняют и длину отрезков. Преобразования 1–3 вместе образуют группу движений плоскости. Эту геометрию (на плоскости и в пространстве) Клейн называет метрической. Она включается в более широкую аффинную геометрию, которую определяет группа аффинных преобразований, т. е. таких, что три точки на прямой она снова переводит в три точки на прямой (сохраняется «коллинеация»). На евклидовой плоскости аффинное преобразование задается в декартовых координатах в виде

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2; \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Это преобразование переводит параллельные прямые в параллельные, а пересекающиеся – в пересекающиеся. Углы и длина отрезка, вообще говоря, не сохраняются, но сохраняется отношение, в котором точка делит отрезок. Поэтому так называемое простое отношение трех точек A, B, C с абсциссами x_A, x_B, x_C, лежащих на одной прямой, т. е. $(x_B - x_A)/(x_C - x_B)$, является инвариантом аффинного преобразования. Свойства аффинных преобразований изучал немецкий геометр и астроном А. Ф. Мёбиус (1790–1868), но понятие «аффинная геометрия» как один из видов геометрий возникло лишь в связи с эрлангенской программой Клейна.

Рассмотренные выше геометрии включаются в проективную геометрию, которую задает группа проективных преобразований (коллинеаций). На евклидовой плоскости в декартовых координатах они имеют вид дробно-линейных преобразований

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \quad \det(a_{ik}) \neq 0; \; i,k = 1,2,3.$$

Проективное преобразование переводит прямые в прямые, но простое отношение трех точек на прямой не сохраняет, а сохраняет двойное отношение

$$(ABCD) = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} : \frac{x_D - x_A}{x_B - x_D}$$

четырех точек A, B, C, D на прямой. Двойное отношение является основным инвариантом проективной геометрии.

В своей классификации Клейн указывает и некоторые другие примеры групп преобразований в геометрии. Свою программу он отразил и в книге [141, т. 2], а также в книге «Высшая геометрия», изданной и на русском языке.

В своих научных исследованиях Клейн имел дело главным образом с дискретными группами. Таковы, например, упоминавшиеся группы дробно-линейных преобразований $\{T_n(z)\}$ в комплексной полуплоскости. К дискретным группам относятся и группы симметрии правильных многогранников, т. е. группы движений, переводящие эти многогранники в себя. Такие группы Клейн рассматривал в своих «Лекциях об икосаэдре и решении уравнений пятой степени» (1884). Там он показал, что группы симметрий, не меняющих ориентацию правильных многогранников (тетраэдра, куба и октаэдра, додекаэдра и икосаэдра), изоморфны соответственно группам подстановок A_4, S_4 и A_5. Икосаэдр (двадцатигранник) связан с алгебраическими уравнениями 5-й степени потому, что его группа симметрии изоморфна группе A_5, а эта группа связана с неразрешимостью в радикалах алгебраических уравнений 5-й степени. Русский математик Е. С. Федоров в работе 1890 г. и немецкий математик А. Шёнфлис в работе 1891 г. рассмотрели группы симметрий правильных пространственных систем точек и показали, что число групп, переводящих такие системы в себя, равно 230. В частности, они установили группы, важные для кристаллографии.

Математики XIX в. имели дело с разнообразными группами матриц. Позже были выделены пять таких групп, называемых классическими, они изоморфны следующим группам матриц (над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, т. е. с элементами, которые являются комплексными и, в частности, действительными числами):

1) $\mathrm{GL}_n(\square)$ – полная линейная группа, т. е. группа невырожденных матриц порядка n;

2) $\mathrm{SL}_n(\square)$ – специальная линейная, или унимодулярная, группа матриц порядка n с определителем, равным единице;

3) $\mathrm{O}_n(\square)$ – ортогональная группа матриц A порядка n, т. е. таких, что $A^{\mathsf{T}} = A^{-1}$, где A^{T} – матрица, транспонированная к матрице A, а A^{-1} – обратная к матрице A (отсюда следует, что $\det A = 1$ или -1);

4) $\mathrm{Sp}_{2m}(\square)$ – симплектическая группа матриц порядка $2m$ (соответствующая ей группа линейных преобразований сохраняет невырожденную кососимметрическую билинейную форму $\sum_{i,k=1}^{2m} a_{ik} x_i y_k$, $a_{ik} = -a_{ki}$);

5) $\mathrm{U}_n(\square)$ – унитарная группа матриц $A = (a_{ik})$ порядка n, т. е. таких, что $A^* = A^{-1}$, где $A^* = (\overline{a}_{ki})$, а черта означает комплексное сопряжение (отсюда следует, что $\det A = 1$ или -1).

В частности, ортогональную и унитарную группы матриц порядка n с определителем, равным единице, называют также специальными и обозначают соответственно через $\mathrm{SO}_n(\square)$ и $\mathrm{SU}_n(\square)$.

Если преобразование, задающее группу, непрерывно зависит от параметров (или коэффициентов), то такая группа называется непрерывной. Геометрия дает много примеров таких групп. Часто преобразования, задающие группы, являются не только непрерывными, но и гладкими (непрерывно дифференцируемыми) или аналитическими, такие группы тоже называют непрерывными.

Основателем теории непрерывных групп является выдающийся норвежский математик **Софус Ли (1842–1899)**. Он родился в Норфьордейде в семье постора, окончил университет в г. Христиания (будущим Осло). В 1870 г. находился вместе с Клейном в Париже на научной стажировке у Жордана. Работал 12 лет в университете в Христиании, а с 1886 г. – в Лейпцигском университете по приглашению Клейна, перешедшего в Гёттингенский университет. Небогатая событиями жизнь С. Ли была заполнена напряженным творческим трудом. В 70–80-х гг. XIX в. он создал основы теории конечных непрерывных групп (групп Ли), применил их прежде всего к

исследованию разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений в квадратурах и начал разрабатывать классификацию таких групп. Свои основные исследования он изложил в ряде статей и трехтомной (около 2000 страниц) «Теории непрерывных групп» (1888–1890), написанной совместно со своим учеником Ф. Энгелем. Ли является редким примером математика XIX в., который занимался разработкой только одной темы – теории непрерывных групп. Свои исследования и лекции он излагал очень обстоятельно. «Собрание сочинений» Ли состоит из 15 томов, сюда не вошел указанный выше трехтомник и ранее опубликованные три книги, содержащие, в частности, его лекции.

Ли рассматривал группы G^r локально аналитических преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) $\tilde{x} = f(x,a)$ с параметрами $a \in \mathbb{R}^r$. Такое преобразование можно записать по-иному: $\tilde{x} = T_a x$. Выполняются групповые свойства: $T_0 = I$, существует $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$, $T_a T_b = T_{\varphi(a,b)}$, проверяется ассоциативность. Ли предполагал также, что функция $\varphi(a,b)$ – аналитическая. Такие группы стали называть группами Ли с 30-х гг. XX в., а сам Ли называл их непрерывными группами. Термин «группа Ли» обычно относят к случаю $a \in \mathbb{R}^r$, а в случае $a \in \mathbb{C}^r$ говорят о комплексной группе Ли. Группами Ли являются, например, различные группы геометрических преобразований (группа движений евклидова пространства и вообще группы невырожденных линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, группы проективных преобразований и др.).

Ли сопоставляет группе G^r набор дифференциальных операторов вида $X_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_k^i(x) \dfrac{\partial}{\partial x_i}, \quad k = 1,\ldots,r$, которые называет инфинитезимальными операторами. При $a \in \mathbb{R}^1$ группа G^1 однопараметрическая. Рассмотрим $\tilde{x} = \psi(a) \equiv f(x,a)$ при фиксированном x и переменном a, тогда

$$\xi^i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial a}(x,0), \quad i = 1,\ldots,n,$$

являются координатами касательного вектора $\xi(x)$ к кривой в точке $a = 0$. В общем случае группе G^r отвечает набор $\xi_k(x)$ касательных векторных полей и соответствующих им инфинитезимальных операторов X_k, $k = 1,\ldots,r$. Например, в

случае группы вращений евклидовой плоскости вокруг начала координат $\tilde{x} = x\cos a - y\sin a$, $\tilde{y} = x\sin a + y\cos a$, получаем

$$\xi^1 = \left.\frac{d\tilde{x}}{da}\right|_{a=0} = -y, \quad \xi^2 = \left.\frac{d\tilde{y}}{da}\right|_{a=0} = x, \quad X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Вообще инфинитезимальный оператор X_k представляет собой оператор дифференцирования по направлению вектора $\xi_k(x)$.

Функция $J(x)$ называется инвариантом группы Ли преобразований $\tilde{x} = f(x,a)$, если $J(f(x,a)) = f(x,a)$. При $a \in \mathbb{R}^1$ инварианты находятся из уравнения $XJ = 0$, где X – инфинитезимальный оператор. В приведенном выше примере группы вращений уравнение $XJ = 0$ имеет вид $-y\frac{\partial J}{\partial x} + x\frac{\partial J}{\partial y} = 0$; решая его, получим $J = x^2 + y^2$, т. е. инвариант группы вращения. Легко видеть, что $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = x^2 + y^2$.

Алгеброй Ли называется линейное (векторное) пространство L с операцией $[X,Y] = XY - YX$ (коммутатором), которая удовлетворяет условиям:

1) билинейная, т. е. линейная как по X, так и по Y;

2) кососимметрическая, т. е. $[X,Y] = -[Y,X]$;

3) удовлетворяет тождеству Якоби

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

Простейшим примером алгебры Ли является совокупность векторов в $\mathbb{R}^3$ с обычным векторным произведением. Ли ввел свою алгебру не в таком общем виде, а для совокупности инфинитезимальных операторов X_k группы Ли, и показал, что всякая группа Ли обладает алгеброй Ли и определяется ею с точностью до локального изоморфизма. Поэтому изучение групп Ли во многом сводится к изучению соответствующих им алгебр Ли. Термин «алгебра Ли» ввел немецкий математик Г. Вейль в 1934 г., а Ли использовал термин «инфинитезиальная группа».

Программу Клейна для геометрии, согласно которой геометрия есть теория инвариантов соответствующих групп преобразований, Ли осуществил для дифференциальных уравнений – обыкновенных и некоторого вида уравнений с частными производными. Главным стимулом создания Ли своей теории было его желание построить теорию разрешимости дифференциальных уравнений в квадратурах по аналогии с теорией Галуа разрешимости алгебраических уравнений в

радикалах. Теорию Ли в той ее части, которая относится к дифференциальным уравнениям, называют групповым анализом дифференциальных уравнений. С началами группового анализа можно познакомиться по брошюре Н. Х. Ибрагимова «Азбука группового анализа» (М.: Знание, 1989. – 44 с.).

Ли рассмотрел группы Ли (и соответствующие им алгебры Ли) обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих эти группы, т. е. инвариантных относительно этих групп. Он показал, что большинство казавшихся ранее лишенными внутренней связи методов интегрирования дифференциальных уравнений могут быть получены единообразно при помощи теории групп. Исследовав инварианты групп преобразований и инвариантные уравнения, Ли дал классификацию обыкновенных дифференциальных уравнений по допускаемым ими группам и классификацию соответствующих групп и алгебр Ли. Он исследовал вопрос о том, когда обыкновенные дифференциальные уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ и уравнения с частными производными $\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ решаются в квадратурах. При этом обнаружилась аналогия между теорией Галуа разрешимости алгебраических уравнений в радикалах и теорией Ли разрешимости дифференциальных уравнений в квадратурах: в обеих теориях вопрос решается с помощью одинакового алгебраического понятия разрешимой группы (ее определение см. в [289], с. 92 в очерке о Галуа).

Групповой анализ дифференциальных уравнений, послуживший стимулом для создания теории групп Ли, тотчас уступает место чисто алгебраическим вопросам, связанным с классификацией групп и алгебр Ли. Уже Ли в работе 1885 г. ввел понятие простой группы Ли, т. е. такой группы, которая не содержит связных нормальных подгрупп, отличных от всей группы и единичной группы. Он нашел следующие 4 класса простых комплексных групп: группа унимодулярных матриц $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$, группы $\mathrm{O}_{2n+1}(\mathbb{C})$ и $\mathrm{O}_{2n}(\mathbb{C})$ ортогональных матриц и группа $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ симплектических матриц. Немецкий математик Вильгельм Киллинг (1847–1923) в работе «Строение непрерывных конечных групп преобразований» (1890) нашел еще 5 классов «особых простых групп» Ли. Французский математик Эли Картан (1869–1951) в своей диссертации «О структуре конечных непрерывных групп» (1894) простые группы Ли, локально изоморфные группам $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C})$, $\mathrm{O}_{2n+1}(\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ и

$\mathrm{O}_{2n}(\mathbb{C})$, назвал классами A_n, B_n, C_n, D_n, а «особые простые группы» – классами G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8, и доказал, что все простые комплексные группы Ли исчерпываются этими девятью классами. Здесь он ввел также понятие полупростой группы Ли, т. е. связной группы Ли, не содержащей связных нетривиальных абелевых нормальных подгрупп. Картан установил критерий разрешимости и полупростоты групп. В работе 1914 г. он дал первую классификацию всех действительных (вещественных) групп Ли, их оказалось больше, чем комплексных.

До конца XIX века математики широко пользовались понятием группы без ее аксиоматического определения. Его дал немецкий математик **Генрих Вебер (1842–1913)** в своей «Алгебре» (1898). Группа G определяется как множество элементов произвольной природы, в котором задана бинарная операция, т. е. для любой упорядоченной пары (a,b) элементов из G определен некоторый элемент $a \circ b$ из G, причем выполнены аксиомы:

1) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ для любых a,b,c из G (ассоциативность);

2) в G существует такой элемент e, что $a \circ e = e \circ a = a$ для любого a из G (существование нейтрального элемента);

3) для любого a из G существует такой элемент a^{-1} из G, что $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

В мультипликативной записи (или, как говорят, в мультипликативной группе) операция называется умножением, вместо $a \circ b$ пишут ab или $a \cdot b$, элемент e называется единицей группы, элемент a^{-1} – обратным к a.

В аддитивной группе операция называется сложением, вместо $a \circ b$ пишут $a+b$; вместо элемента e говорят о нулевом элементе 0 группы, так что $a+0=0+a=a$ для любого элемента a из G; вместо элемента a^{-1} говорят о противоположном к a элементе $(-a)$, так что $a+(-a)=(-a)+a=0$.

Свойство коммутативности ($a \circ b = b \circ a$ для любых a, b из G) не предполагается, но если оно выполнено, то группа называется коммутативной, или абелевой.

Одним из первых систематически изложил теорию групп **Отто Юльевич Шмидт (1891–1956)** в своей книге «Абстрактная теория групп» (Киев, 1916). Он родился в Могилеве. Окончил Киевский университет в 1913 г., преподавал в нем в

1916–1920 гг., а затем в Московском университете. Академик АН СССР (1935), главный редактор БСЭ (1924–1941), известный полярный исследователь.

В конце XIX в. развивается **теория линейных представлений групп**. Приведем некоторые определения и пример.

Отображение $f: G \to G'$ группы $(G,*)$ в группу $(G',\circ)$ называется гомоморфизмом, если

$$f(a*b) = f(a)\circ f(b) \quad \text{для любых} \quad a,b \in G,$$

т. е. f переводит групповую операцию в G в групповую операцию в G'. Видно, что при этом $f(e)=e'$, где e и e' – единицы групп соответственно G и G'. (Термин «гомоморфизм» ввел Фробениус.) Ядром гомоморфизма f называется множество

$$\operatorname{Ker} f = \{g \in G : f(g) = e'\}.$$

Это множество элементов группы G, которое гомоморфизм f переводит в единицу e' группы G'. Если $\operatorname{Ker} f = \{e\}$, где e – единица группы G, то гомоморфизм $f: G \to \operatorname{Im} f$ является изоморфизмом.

Возьмем в качестве множества векторное пространство V размерности n над полем K и группу $\mathrm{GL}(V)$ обратимых линейных преобразований $V \to V$ (линейных операторов). При любом выборе базиса $\{e_1,\dots,e_n\}$ в V группа $\mathrm{GL}(V)$ становится матричной группой $\mathrm{GL}_n(K)$. Каждому линейному преобразованию $\mathsf{A} \in \mathrm{GL}(V)$ при этом отвечает матрица $A=(a_{ij})$ такая, что

$$Ae_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j, \quad a_{ij} \in K, \quad \det A \neq 0.$$

Всякий гомоморфизм T группы G в группу $\mathrm{GL}(V)$ обратимых линейных преобразований (линейных операторов) называется линейным представлением группы G в пространстве V. Говорят также, что линейное представление – это пара (T,V), состоящая из пространства представления V и гомоморфизма $T: G \to GL(V)$. (О пространстве V можно не упоминать, если под линейным представлением T группы G попросту понимать гомоморфизм T группы G в матричную группу $\mathrm{GL}_n(K)$.) Функция $\chi_T : g \to \operatorname{tr} T(g)$, где $g \in G$, называется характером представления

T, т. е. χ_T есть сумма диагональных элементов (след) матрицы A для представления T.

Приведем простой пример. Рассмотрим вращение евклидовой плоскости вокруг начала координат на угол α, оно задается линейным преобразованием А :

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \quad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Здесь $\alpha \in G = \mathbb{R}$, $(x, y) \in V = \mathbb{R}^2$,

$$T : \alpha \to A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Легко проверяется, что $A(\alpha + \beta) = A(\alpha)A(\beta)$, следовательно, T является гомоморфизмом аддитивной группы $G = \mathbb{R}$ в мультипликативную группу GL_2. Здесь $\mathrm{Ker}\, T = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, так как $A(2k\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$. Характером представления T здесь является функция $\chi_T(\alpha) = 2\cos\alpha$. Отметим еще, что $A(\alpha) \in \mathrm{SO}_2$.

Немецкий математик **Фердинанд Георг Фробениус (1849–1917)** в работе «О групповых характерах» (1896) построил полную теорию линейных представлений конечных коммутативных групп. Он рассматривает группы, представленные комплексными матрицами, и вводит для этих матриц как функций от элемента g группы понятие характера $\chi(g)$, определяемого как след матрицы. При этом он показывает, что

1) число различных характеров конечной коммутативной группы G, включая «главный характер» $\chi_0(g) = 1$, равно числу элементов группы;

2) произведение двух характеров $\chi_1(g)\chi_2(g)$ является характером;

3) характеры по этому произведению образуют группу, в которой роль единицы играет $\chi_0(g)$;

4) группа характеров группы G изоморфна самой группе G.

В частности, характеры циклической группы $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}$ при условии $\theta^n = 1$ получаются по формуле $\chi_h(\theta^k) = e^{2\pi khi/n}$.

Здесь же Фробениус дал определения неприводимого, приводимого и вполне приводимого линейных представлений групп.

Ф. Г. Фробениус родился в Берлине, окончил Берлинский университет. Ученик Э. Куммера, Л. Кронекера и К. Вейерштрасса. В 1875–1892 гг. – профессор Цюрихского политехникума, с 1892 г. – Берлинского университета. Член Берлинской АН с 1893 г. Основные его исследования посвящены алгебре (теория конечных групп, теория гиперкомплексных чисел и алгебр).

Английский математик У. Бёрнсайд (1852–1927) в работе «Об условиях приводимости для произвольной группы линейных подстановок» (1905) обобщил результаты Фробениуса на конечные некоммутативные группы [51, с. 349–351].

Теорию линейных представлений групп Ли основал в работе 1913 г. французский математик Эли Картан (1869–1951).

3. **Алгебраическая теория инвариантов.**

Термин «инвариант» происходит от латинского слова *invarians* – «неизменяющийся». Вообще говоря, инвариантами являются математические объекты или их свойства, которые не меняются при преобразованиях множеств, связанных с этими объектами. Современное определение инварианта как некоторого отношения эквивалентности на множестве математических объектов приведено в [197, т. 2, с. 525-527]. Инварианты широко используются в различных областях математики (алгебре, геометрии, топологии и др.).

Классическая алгебраическая теория инвариантов, созданная в XIX в., заключается в построении инвариантов форм (однородных многочленов) $P(x_1,\ldots,x_n)$ степени k и их систем. Она обязана своему происхождению теории чисел (классификация бинарных квадратичных форм), геометрии (проективные свойства кривых) и алгебре (теория определителей). В математике XIX в. алгебраическая теория инвариантов занимала одно из центральных мест.

Через SL_n обозначают унимодулярную (специальную линейную) группу, т. е. группу всех невырожденных матриц порядка n с определителем 1. Линейное преобразование, отвечающее элементу $g \in \mathrm{SL}_n$, переводит форму $P(x_1,\ldots,x_n)$ в новую форму $P^g(x_1,\ldots,x_n) = P(g(x_1),\ldots,g(x_n))$. Пусть число n переменных x_i и степень k формы P фиксированы, тогда ее коэффициенты образуют множество E. Отображение $P \to P^g$ представляет собой линейное преобразование пространства

$\mathbb{R}^n$, при этом множество E перейдет в новое множество E^g. Инвариантом формы P называется функция I на множестве E, которая является многочленом от элементов множества E (т. е. от коэффициентов формы P) и не меняется под действием группы SL_n, т. е. $I(E^g) = I(E)$ для всех $g \in \mathrm{SL}_n$.

Если вместо унимодулярной группы SL_n брать полную линейную группу GL_n (т. е. группу всех невырожденных матриц порядка n), то инвариантом формы P называется функция (многочлен) $I(E)$, удовлетворяющая равенству $I(E^g) = |r|^{\lambda} I(E)$, где r – определитель линейного преобразования, отвечающего элементу $g \in \mathrm{GL}_n$, а λ – некоторое число (вес инварианта).

Если вместо одной формы рассматривается набор (система) форм $P_1, \ldots, P_s$ и действие на них линейного преобразования $\left(P_1, \ldots, P_s\right) \to \left(P_1^g, \ldots, P_s^g\right)$, то их совместный инвариант I определяется как и выше, но на множестве всех коэффициентов этих форм.

Первоначально идея алгебраической теории инвариантов возникла в теории чисел – в «Арифметических исследованиях» Гаусса (а еще раньше – у Лагранжа) в связи с изучением бинарных квадратичных форм $P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Определитель (в иной терминологии – дискриминант) $D = b^2 - ac$ является инвариантом под действии группы SL_2, т. е. при линейном преобразовании пространства $\mathbb{R}^2$ с определителем 1 (см. [289, с. 20]).

У истоков теории инвариантов находились две работы Якоби 1841 г.: «Об образовании и свойствах определителей» и «О функциональных определителях». Он, в частности, показал, что для системы n линейных форм $P_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, $i = 1, \ldots, n$, определитель $D = \det(a_{ij})$ является инвариантом относительно групп SL_n. Во второй из этих работ он рассматривает систему (набор) произвольных дифференцируемых функций $f_1, \ldots, f_n$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и показывает, что определитель $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ системы при выполнении некоторых условий является инвариантом (точнее – ковариантом) системы относительно линейной замены переменных. (Инвариант, который зависит и от переменных x_i, т. е. от координат

пространства $□^n$, называют ковариантом.) Указанный выше определитель позже получил название якобиана и широкое применение в математике.

Немецкий математик Л. О. Гессе (1811–1874), ученик Якоби, для формы $P(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ рассмотрел определитель $\det\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, названный позже гессианом, и показал, что он является инвариантом относительно группы SL_n линейных преобразований. Немецкий математик Ф. Г. М. Эйзенштейн (1823–1852), ученик Гаусса, работавший в Берлине, нашел для бинарной кубической формы

$$P=ax_1^3+3bx_1^2x_2+3cx_1x_2^2+dx_2^3$$

ковариант – гессиан $H=\det\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2}\right)$, а также инвариант

$$I=3b^2c^2+6abcd-4b^3d-4ac^3-a^2d^2,$$

который с точностью до числового множителя является дискриминантом $AC-B^2$ гессиана $H=Ax_1^2+2Bx_1x_2+Cx_2^2$. Немецкий математик З. Г. Аронгольд (1819–1884) внес значительный вклад в изучение инвариантов тернарных кубических форм, т. е. форм с тремя переменными и степенью 3.

С 40-х гг. XIX в. к разработке теории инвариантов приступают английские математики Кэли, Сильвестр и ирландский математик и теолог Сальмон. Их роль в разработке этой теории особенно велика. В 1846 г. Кэли опубликовал свой «Мемуар о гипердетерминантах», где термин «гипердетерминант» означает инвариант. С 1854 по 1878 год Кэли опубликовал 9 статей «Мемуары о формах» по теории инвариантов, где получает много конкретных результатов и открывает символический метод вычисления инвариантов. В частности, для бинарной формы 4-й степени

$$P=ax_1^4+4bx_1^3x_2+6cx_1^2x_2^2+4dx_1x_2^3+ex_2^4,\qquad a,b,c,d\in□,$$

он находит полную систему из четырех инвариантов, два из которых имеют вид:

$$g_2=ae-4bd+3c^2,\qquad g_3=\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&d\\c&d&e\end{vmatrix}.$$

Из британских математиков главную роль в разработке теории инвариантов сыграл английский математик **Джеймс Джозеф Сильвестр (1814–1897)**. Он родился

в Лондоне в еврейской семье. Окончил в 1837 г. Кембриджский университет и стал работать в Университетском колледже в Лондоне, а затем переехал в США. В 1841–1845 гг. был профессором университета в Вирджинии, в 1845–1855 гг. работал в страховой компании, а также адвокатом. Затем Сильвестр до 1871 г. был профессором военной академии в Вулвиче, с 1876 г. – профессор университета в Балтиморе. Он был первым в США, кто продуктивно работал над проблемами чистой математики. Уже там он начал заниматься теорией инвариантов. Основал один из наиболее известных и поныне журнал – *American Journal of Mathematics*. В 1883 г. Сильвестр вернулся в Англию и до конца жизни работал профессором Оксфордского университета.

После возвращения в Англию Сильвестр стал одним из ведущих математиков в области теории инвариантов, ему принадлежат почти все используемые в настоящее время термины этой теории: инвариант, ковариант, дискриминант, и др., он же ввел в 1850 г. и термин «матрица». Занимаясь теорией приведения квадратичных форм к каноническому виду, он ввел термин «закон инерции квадратичных форм».

В 40–70-х гг. XIX в. основной задачей в теории инвариантов было отыскание частных инвариантов. Но уже раньше для некоторых форм была найдена полная система инвариантов, т. е. такое конечное число инвариантов, что все остальные инварианты являются многочленами от них. Кэли в 1855 г. нашел полные системы инвариантов для бинарных форм степени 3 и 4. Для более высоких степеней и большего числа переменных построение полных систем инвариантов оказалось трудным. Частично здесь помогал символический метод, разработанный в основном немецкими математиками. Большого успеха добился **Пауль Гордан (1837–1912)**, работавший профессором Эрлангенского университета. В 1868 г. он доказал существование полной конечной системы инвариантов для бинарных форм любых степеней, а в 1870 г. доказал это и для любой конечной системы бинарных форм, за что его прозвали «королем теории инвариантов». Явный вид полной системы инвариантов для бинарных форм степени n был найден лишь при $n \leq 6$. Потом Гордан нашел полную систему инвариантов для тернарных квадратичных форм, для тернарных кубических форм и для систем двух и трех тернарных квадратичных форм.

С современной точки зрения полная система инвариантов – это конечная система образующих кольца инвариантов. Наивысшего результата здесь добился

немецкий математик **Давид Гильберт (1862–1943)** в своих двух работах «О теории алгебраических форм» (1890) и «О полной системе инвариантов» (1893). В первой из них он с помощью своей теоремы о базисе доказал, что кольцо целых инвариантов имеет конечное число образующих. Доказательство было простое, хотя и неэффективное. Во второй из этих работ, завершающей его исследования по теории инвариантов, он предлагает явный и конструктивный способ решения этой задачи. По выражению немецкого математика Г. Вейля, Гильберт «убил» классическую алгебраическую теорию инвариантов, разработанную в XIX в. для алгебраических форм – однородных многочленов степени k от n переменных. Изучение инвариантов в других разделах математики, начавшееся в XIX в. (в геометрии, теории групп Ли и др.), продолжалось и в XX в. в теории групп, топологии, алгебраической геометрии, интегральной геометрии и др.

Об алгебраической теории инвариантов: [107, с. 76–82; 140, с. 176–188].

4. **Возникновение теории алгебраических чисел и понятий поля, кольца, модуля и идеала**.

В XIX в. при оперировании со все более сложными числовыми системами для описания их свойств потребовалось ввести указанные новые понятия в зависимости от вида необходимых операций. В XX в. эти понятия приобрели абстрактный характер и стали применимы к множествам различной природы, а не только к числовым системам. Для большей ясности изложения начнем с современных определений, а затем опишем историю их возникновения.

Кольцо – это множество K, в котором определены две операции – сложение и умножение, причем выполнены условия (аксиомы):

1) по операции сложения множество K является абелевой (т. е. коммутативной) группой;
2) операция умножения ассоциативна: $(ab)c = a(bc)$ для любых $a,b,c \in K$;
3) операции сложения и умножения связаны свойством дистрибутивности: $a(b+c) = ab + ac$ для любых $a,b,c \in K$.

Множество с заданной на нем ассоциативной операцией называется полугруппой. Таким образом, по операции умножения кольцо является полугруппой.

Чаще всего рассматриваются кольца с единицей 1, т. е. такие кольца, в которых умножение обладает единицей. Кольцо K называется коммутативным, если $ab = ba$ для всех $a, b \in K$ (коммутативное кольцо не принято называть абелевым). Примерно с середины XX в. общая теория колец строится без предположения ассоциативности умножения. В противном случае кольцо называется ассоциативным. В XIX в. рассматривались ассоциативные кольца.

Частными случаями колец являются тела и поля.

Если в определении кольца заменить условие 2 более сильным условием

2') $K \setminus \{0\}$ является группой по операции умножения,

то такое кольцо называется телом.

Если же условие 2 заменить условием

2'') $K \setminus \{0\}$ является коммутативной группой, по умножению,

то такое кольцо называется полем.

Говорят, что поле – это коммутативное тело. Таким образом, поле – это коммутативное кольцо с единицей $1 \neq 0$, в котором каждый элемент $a \neq 0$ обратим, т. е. имеет обратный a^{-1}. Можно считать, что тело – это кольцо с делением, а поле – коммутативное кольцо с делением, имея в виду, что в телах и полях для любого a и любого $b \neq 0$ определено частное $\frac{a}{b} = ab^{-1}$. Кольцо является коммутативной (абелевой) группой по сложению, а поле – и по сложению и по умножению, связанных законом дистрибутивности.

Простейшими примерами полей (относительно естественных операций в них) являются:

1) множества $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, соответственно, рациональных, действительных и комплексных чисел;

2) множество всех рациональных функций (т. е. многочленов или отношений многочленов) одной или нескольких переменных с действительными коэффициентами, а также с коэффициентами из произвольного поля.

Эти множества являются также телами и кольцами.

Приведем примеры колец, не являющихся полями и телами:

1) кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел;

2) кольцо $\mathbb{Z}[i]$ целых комплексных (целых гауссовых) чисел вида $a+bi$, где $a,b \in \mathbb{Z}$;

3) кольцо $K[X]$ многочленов от одной переменной с коэффициентами из поля K.

Пример тела, не являющегося полем, – тело кватернионов, т. е. чисел вида $a+bi+cj+dk$, о них подробнее речь будет ниже в пункте 5.

В приведенных выше примерах кольца состояли из бесконечного числа элементов. Примером конечного кольца (т. е. кольца с конечным числом элементов) является кольцо $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ классов вычетов по модулю m в теории чисел. Оно уже встречалось у Эйлера и Гаусса.

Строится кольцо $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ следующим образом. Пусть m – фиксированное натуральное число. Любое целое число a можно представить в виде $a=mk+r$, где $k \in \mathbb{Z}$, а r – один из возможных остатков $0,1,2,\ldots,m-1$. Целые числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если они оба при делении на m дают одинаковый остаток. Это записывают в виде сравнения $a \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$. Отношение сравнения разбивает множество $\mathbb{Z}$ целых чисел на m непересекающихся классов $C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$ сравнимых по модулю m чисел. (В один класс попадают все целые числа, дающие один и тот же остаток при делении на m.) Эти классы называются классами вычетов по модулю m. Далее можно ввести операции сложения и умножения этих классов и убедиться, что эти m классов образуют коммутативное кольцо, его обычно обозначают $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Если m – простое число p, то каждый элемент (класс вычетов) кольца $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, отличный от нулевого, имеет обратный, поэтому $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ – поле.

Большое значение для дальнейшего развития теории чисел и алгебры имела построенная Гауссом теория делимости в кольце $\mathbb{Z}[i]$ целых комплексных чисел, см. [289], с. 27–28. У Гаусса не было термина «кольцо».

Решающее значение для формирования теории колец и полей имела теория алгебраических чисел, которая возникла в XIX в. главным образом в работах немецких математиков Э. Куммера, Р. Дедекинда и Л. Кронекера. Число α называется алгебраическим над полем K, если оно является корнем некоторого многочлена $f(x)$ (алгебраического уравнения $f(x)=0$) с коэффициентами из поля K. В XIX в. под алгебраическими числами понимали корни алгебраических

уравнений с целыми коэффициентами, т. е. рассматривали алгебраические числа над кольцом $\mathbb{Z}$. Все другие числа называются трансцендентными. В 1844 г. французский математик Ж. Лиувилль доказал существование трансцендентных чисел и привел их примеры. Трансцендентность числа e доказал в 1873 г. французский математик Ш. Эрмит, а числа π – в 1882 г. немецкий математик Ф. Линдеман.

Используя симметрические функции, можно показать, что сумма, разность, произведение и частное алгебраических чисел являются алгебраическими числами. Таким образом, множество алгебраических чисел является полем.

Если число α является корнем алгебраического многочлена степени n с целыми коэффициентами, но не является корнем никакого алгебраического многочлена меньшей степени с целыми коэффициентами, то α называют алгебраическим числом степени n.

Особенно важную роль среди алгебраических чисел играют так называемые целые алгебраические числа. Это понятие ввели в 40-х гг. XIX в. независимо друг от друга Эйзенштейн, Дирихле и Эрмит. Число α называется целым алгебраическим, если оно является корнем некоторого алгебраического многочлена с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным единице. Среди таких многочленов найдется многочлен наименьшей степени $n \geq 1$, корнем которого является целое алгебраическое число α степени n. Он является неприводимым над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. (Неприводимым над полем K называется многочлен, непредставимый в виде произведения многочленов степени ≥ 1 с коэффициентами из поля K.)

Примеры целых алгебраических чисел степени 2:

1) число i – корень многочлена x^2+1;
2) число $1+\sqrt{2}$ – корень многочлена x^2-2x-1;
3) число $e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ – корень многочлена x^2+x+1, оно более известно как корень многочлена $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$.

Число $\frac{1}{2}+i\sqrt{2}$ (корень многочлена $4x^2-4x+9$) является алгебраическим степени 2, но не целым алгебраическим, так как не является корнем многочлена ax^2+bx+c с $a=1$ и целыми b,c.

Сумма и произведение целых алгебраических чисел являются целыми алгебраическими, поэтому целые алгебраические числа образуют кольцо.

Построенная Гауссом теория делимости в кольце $□[i]$ побудила математиков XIX в. к дальнейшим обобщениям. Но, в отличие от ситуации в □ и $□[i]$, во множестве всех целых алгебраических чисел нет аналога простым числам, т. е. нет «неразложимых» чисел, так как если α – целое алгебраическое число, то $\sqrt{\alpha}$ – тоже целое алгебраическое число и $\alpha = \sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha}$. Поэтому нецелесообразно рассматривать множество всех целых алгебраических чисел. Обычно рассматривают кольцо $□[\alpha]$, полученное в результате присоединения целого алгебраического числа α к кольцу □ целых рациональных чисел с сохранением операций сложения и умножения, или же рассматривают кольцо $□[\alpha]$ целых алгебраических чисел в поле $□(\alpha)$. Это поле получается присоединением целого алгебраического числа α степени $n > 1$ к полю □ рациональных чисел.

Алгебраическими единицами называются делители единицы, т. е. такие целые алгебраические числа ε, что и $\frac{1}{\varepsilon}$ – целое алгебраическое число. Числа, отличающиеся единичным множителем, т. е. α и $\alpha\varepsilon$, называются ассоциированными. В вопросах делимости они могут быть заменены одно другим. Дирихле построил теорию единиц кольца целых алгебраических чисел вида $b_0 + b_1\theta + \ldots + b_{n-1}\theta^{n-1}$, где $b_1, \ldots, b_{n-1} \in □$, а θ – целое алгебраическое число.

В $□[\alpha]$ и $□[\alpha]$ существуют простые («неразложимые») целые алгебраические числа, т. е. такие, что они делятся только на единицы, на себя и ассоциированные с собой числа. Немецкий математик **Ф. Г. М. Эйзенштейн (1823–1852)**, ученик Гаусса, работавший в Берлине, построил теорию делимости в кольце $□[\rho]$, где $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ – так называемый первообразный корень 3-й степени из единицы, это один из трех корней уравнения $\zeta^3 = 1$. Поскольку $\rho^2 = -1 - \rho$, то элементы кольца $□[\rho]$ составляют числа $a + b\rho$, где $a, b \in □$. Здесь, как и в □ и $□[i]$, верен алгоритм Евклида, есть понятие наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного, имеет место основная теорема арифметики о единственности разложения целых чисел на неразложимые (простые) множители. Единственность разложения

подразумевается с точностью до единиц и порядка сомножителей. Заметим, что в $\mathbb{Z}$ имеется всего две алгебраические единицы: 1 и -1, в $\mathbb{Z}[i]$ – четыре: ± 1 и $\pm i$. В $\mathbb{Z}[\rho]$, где $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, их шесть: ± 1, $\pm\rho$, $\pm\rho^2$, они являются корнями уравнения $\zeta^6 = 1$. Эйзенштейн доказал также закон взаимности для кубических и для биквадратных вычетов.

Для развития теории чисел, а с середины XIX в. – и теории алгебраических чисел, большую роль сыграли попытки доказать Великую (или Последнюю) теорему Ферма. Она утверждает, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ при натуральных $n \geq 3$ и $xyz \neq 0$ не имеет решений в целых числах. Ее достаточно доказать для $n = 4$ и простых $n \geq 3$. Об истории доказательств этой теоремы говорилось в нашем пособии [234] на с. 26–27 в очерке о П. Ферма (1601–1665) и на с. 208–209 в очерке об А. М. Лежандре (1752–1833), где приведены и краткие сведения о французской женщине-математике **Софи Жермен (1776–1831)**.

Ферма доказал свою теорему при $n = 4$. А около 1768 г. ее доказал Л. Эйлер при $n = 3$. Его доказательство опирается на лемму: если $a^2 + 3b^2$, где a, b – целые, является кубом, то существуют такие целые x, y, что $a = x^3 - 9xy^2$, $b = 3x^2y - 3y^3$. При ее доказательстве он смело пишет

$$a^2 + 3b^2 = (a + b\sqrt{-3})(a - b\sqrt{-3})$$

и далее действует с числами $a \pm b\sqrt{-3}$ как с обычными целыми числами. В частности, он незаконно считает, что если $a^2 + 3b^2$ является кубом, то существуют такие целые p, q, что $a \pm b\sqrt{-3} = (p \pm q\sqrt{-3})^3$. Перенос арифметики целых чисел на числа вида $a + b\sqrt{-3}$ с целыми a, b (т. е. на элементы кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$) является ошибочным, поскольку в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ основная теорема арифметики о единственности разложения элементов на простые множители неверна, например $4 = 2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$. Однако доказательство леммы Эйлера можно, хотя и длинно, исправить с помощью результатов Эйлера, которые он получил в других работах, не используя чисел вида $a + b\sqrt{-3}$.

В начале XIX в. в доказательствах Великой теоремы Ферма принято было различать два случая:

I) когда ни одно из трех чисел x, y, z не делится на показатель n;

II) когда хотя бы одно из чисел x, y, z (но не все) делится на n.

Оказалось, что в случае I теорема Ферма допускает элементарное доказательство. В частности, Софи Жермен доказала, что если n – нечетное простое число и при этом $2n+1$ простое, то из того, что ни одно из чисел x, y, z не делится на n, следует, что $x^n + y^n \neq z^n$. Это равносильно тому, что если $x^n + y^n = z^n$ при $xyz \neq 0$ имеет решение, то при указанных n случай I невозможен. С помощью своей более общей теории Жермен в случае I доказала теорему Ферма для простых $n < 100$. Лежандр обобщил результат Жермен и доказал теорему Ферма в случае I для простых $n < 197$. Отметим еще, что в 1811 г. Софи Жермен была награждена премией Парижской академии наук за статью по теории упругости об изгибе пластинок. Это была первая премия, которой Парижская АН наградила женщину.

При $n = 5$ в случае I теорема Ферма следует из результата Жермен. В случае II при $n = 5$ теорему Ферма частично доказал Дирихле в 1825 г., а закончил это доказательство в том же году Лежандр, оно было очень сложным. Дальнейшие попытки доказать теорему Ферма без ограничений на x, y, z привели во второй половине XIX в. к глубокой разработке теории алгебраических чисел.

Главным из основоположников теории алгебраических чисел является немецкий математик **Эрнст Эдуард Куммер (1810–1893)**. Он родился в Зорау, окончил университет в Галле, работал в Бреслау (ныне Вроцлав в Польше), а с 1855 г. – в Берлинском университете, где заменил Дирихле, который в Гёттингене занял кафедру Гаусса. Первые работы Куммера посвящены теории рядов, его имя носит один из признаков сходимости ряда. Около 1842 г. он заложил основы алгебраической теории чисел и далее продолжал ее развивать, занимаясь доказательством Великой теоремы Ферма. Большую известность Куммеру принесло то, что он ввел так называемые «идеальные числа» для обеспечения единственности разложения целых алгебраических чисел на простые множители. В 1850 г. Куммер, используя свою теорию «идеальных чисел», доказал теорему Ферма для всех тех простых показателей $n = p$, которые не делят числителей ни одного из чисел Бернулли $B_2, B_4, B_6, \ldots, B_{p-3}$. Такие показатели Куммер назвал регулярными.

Числа Бернулли были названы А. Муавром по имени Якоба Бернулли, у которого они появились в трактате «Искусство предположений» (1713) при суммировании степеней натуральных чисел. С тех пор числа Бернулли широко используются в математике. Они являются коэффициентами в разложении $\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} t^m$, но вычислять их удобно по рекуррентной формуле: $B_0 = 1$, $\sum_{k=0}^{m-1} C_m^k B_k = 0$, $m \geq 2$. Оказывается, что $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_m = 0$ для всех нечетных $m \geq 3$, а числа Бернулли с четными индексами имеют чередующие знаки. Примеры чисел Бернулли с четными индексами:

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30},$$

$$B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}.$$

Отсюда видно, что простые числа 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 являются регулярными. Наименьшим нерегулярным простым числом является 37. Оно делит числитель числа $B_{32} = -\frac{7709321041217}{510}$, что видно, если записать числитель в виде $7709321041217 = 111 \cdot 69453342713 + 74$.

Куммер показал, что в пределах первой сотни натуральных чисел нерегулярными простыми являются только 37, 59 и 67. Используя более мощную технику, Куммер в работе 1857 г. доказал теорему Ферма для некоторого класса нерегулярных простых показателей, включающих и числа 37, 59 и 67. Таким образом, теорема Ферма оказалась доказанной для всех показателей $n < 100$ (без каких-либо ограничений на целые x, y, z, отличные от нуля). За это Куммеру была присуждена премия Парижской академии наук. Его результат долго оставался непревзойденным. Доказательство Куммера является сложным.

Остановимся еще на одном событии в Парижской АН, связанном с теоремой Ферма, и о роли в нем Куммера. В 1839 г. французский математик Г. Ламе (1795–1870) доказал теорему Ферма для $n = 7$. В 1847 г. он доложил в Парижской АН и опубликовал некоторые детали своего якобы полного доказательства теоремы Ферма для всех простых показателей λ, основанного на разложении

$$x^{\lambda}=z^{\lambda}-y^{\lambda}=(z-y)(z-\zeta y)(z-\zeta^{2}y)\ldots(z-\zeta^{\lambda-1}y),$$

где $x,y,z\in\mathbb{Z}$, $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{\lambda}}$ (это число называется первообразным корнем степени λ из единицы), $\zeta^{\lambda}=1$. Сомножители в этом разложении входят во множество чисел $a_0+a_1\zeta+\ldots+a_n\zeta^{\lambda-1}$ с такими же λ и ζ и целыми коэффициентами. Такие числа обычно называют круговыми целыми, так как корни уравнения $\zeta^{\lambda}=1$, где $\lambda\in\mathbb{N}$, лежат на окружности радиуса 1 и делят ее на λ равных частей.

Лиувилль после доклада Ламе высказал сомнение в полноте доказательства Ламе, заметив, что оно опирается на недоказанное утверждение о единственности (однозначности) разложения круговых целых в произведение простых круговых целых. В том же 1847 г. пришло письмо от Куммера, которое произвело на французских математиков огромное впечатление. Он сообщил, что заметил нарушение единственности разложения круговых целых на простые круговые целые и построил теорию «идеальных чисел», которая «спасает» единственность разложения. Краткое изложение теории Куммера опубликовано в 1846 г., подробное, хотя и не вполне точное, – в 1847 г., а полное – в 1857 г.

На том же заседании Коши сообщил, что он тоже работает над доказательством теоремы Ферма. Менее чем через месяц Коши и Ламе представили в Академию «секретные пакеты» (так делали тогда на случай, если возникнет дискуссия о приоритете). В свете событий 1847 г. почти не было сомнений, что в пакетах содержалось доказательство теоремы Ферма. Вскоре Коши и Ламе забрали свои пакеты, но Коши еще некоторое время в своих работах пытался доказать для круговых целых единственность их разложения на простые множители.

Обнаружить неединственность разложения круговых целых на множители было крайне трудно. Ламе ограничился только проверкой единственности разложения на нескольких примерах круговых целых при $\lambda=5$, а Куммер проделал огромную вычислительную работу и нашел, что для простых $\lambda<23$ единственность сохраняется, а при $\lambda=23$ нарушается. Куммер построил теорию простых идеальных чисел, делящих заданные круговые целые. Основные приемы работы Куммера – исследование норм круговых целых и широкое использование сравнений: числовых (по модулю простого числа) и функциональных (одного кругового целого по модулю другого).

В современной алгебраической теории чисел аналогами идеальных чисел Куммера являются дивизоры (от английского *divisor* – «делитель»). Множество ненулевых круговых целых отображается во множество дивизоров так, что каждому ненулевому круговому целому ставится в соответствие либо простой дивизор, либо составной, который единственным способом разлагается на простые с учетом их кратности. Можно сказать, что множество ненулевых круговых целых расширяется (пополняется) совокупностью их дивизоров.

Заметим, что единственность разложения целых чисел на простые, имеющая место в кольцах $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$ и рассмотренном Эйзенштейном кольце $\mathbb{Z}[\rho]$ круговых целых, где $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, не является фактом, типичным для числовых колец. Например, в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ квадратичных целых, т. е. чисел вида $a + b\sqrt{-5}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, число 6 разлагается на простые сомножители двумя способами: $6 = 2 \cdot 3$ и $6 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$. Можно пополнить множество $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ «идеальными числами»

$$p_1 = \sqrt{2}, \quad p_2 = \frac{1+\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}, \quad p_3 = \frac{1-\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$$

(они не содержатся в $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$). Если через $\varphi(q)$ обозначить дивизор числа q, а через p_i – простые дивизоры, то

$$\varphi(2) = p_1^2, \quad \varphi(3) = p_2 p_3, \quad \varphi(1+\sqrt{-5}) = p_1 p_2,$$
$$\varphi(1-\sqrt{-5}) = p_1 p_3, \quad \varphi(6) = p_1^2 p_2 p_3.$$

Таким образом, число 6 разлагается единственным способом в произведение простых дивизоров p_i с учетом их кратности.

Теория Куммера и ее приложения подробно изложены в книгах Г. Эдвардса и М. М. Постникова, указанных в нашем пособии [234] на с. 27.

Полное доказательство теоремы Ферма дал в 1994 г. английский математик Эндрю Уайлс совершенно иными средствами (см. краткую справку в нашем пособии [234] на с. 27).

Понятия поля (тела), кольца, модуля и идеала ввел выдающийся немецкий математик **Рихард Дедекинд (1831–1916)**. Он родился в Брауншвейге, где его отец был профессором университета и юрисконсультом. В 1852 г. Дедекинд окончил Гёттингенский университет. Там он подружился с Риманом, написал под

руководством Гаусса докторскую диссертацию по эйлеровым интегралам. В 1854–1858 гг. Дедекинд работал в Гёттингенском университете, общался с Дирихле, первым читал курс лекций по теории Галуа. В своих лекциях ввел понятие поля и элементы расширения числовых полей. В 1858–1862 гг. работал в Цюрихском политехникуме в качестве преемника швейцарского математика Й. Л. Раабе (1801–1859), имя которого носит один из признаков сходимости числовых рядов. С 1862 г. Дедекинд – профессор Высшей политехнической школы в Брауншвейге.

Основные работы Дедекинда посвящены теории алгебраических чисел. Он заложил основы современной алгебры. В 1872 г. предложил теорию действительных чисел, основанную на понятии сечения, которое носит его имя. В 1887 г. дал общее определение отображения в виде: «Под отображением φ какой-либо системы S будем понимать закон, согласно которому каждому определенному элементу s системы S принадлежит вполне определенная вещь, которая называется образом s и обозначается символом $\varphi(s)$». Оно мало отличается от принятого в настоящее время: сейчас говорят об отображении множества X во множество Y, а вместо «принадлежит вполне определенная вещь» – «соответствует единственный элемент $y \in Y$». В 1888 г. Дедекинд сформулировал систему аксиом арифметики, которая носит имя Пеано, предложившего ее тремя годами позже.

Но самой главной заслугой Дедекинда является то, что он заложил основы современной алгебры. Понятия поля (тела), кольца, модуля и идеала, которые он ввел для числовых систем, в XX в. стали абстрактными, применяемыми к объектам произвольной природы, и проникли во многие разделы математики. Он ввел их в 1871 г. в X дополнении к изданию «Лекций по теории чисел» Дирихле, а затем в более широком XI дополнении к переизданию этих лекций (1879, 1894).

Новый подход Дедекинда можно охарактеризовать как теоретико-множественный – не только в теории алгебраических чисел, но и при построении действительных чисел как сечений во множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Современное понятие поля как множества, удовлетворяющего определенным аксиомам, было в общем-то чуждо математической мысли до Дедекинда. Абель и Галуа определяли свое основное поле («область рациональности») как состоящее из чисел и всевозможных рациональных функций от них, но не пришли к мысли рассматривать его как некоторое числовое множество.

В XI дополнении Дедекинд дает следующее определение: «Система A действительных или комплексных чисел называется телом (*Körper*), если суммы, разности, произведения и частные каждых двух чисел принадлежат A». В таком смысле термин «тело» (французское *corps* и английское *corpus*) использовался еще и в первой половине XX в., но затем был вытеснен английским словом *field* – «поле», а термином «тело» стали называть более широкое понятие, в котором коммутативность умножения была необязательной, а остальные свойства – такие же, как у поля. В своем определении Дедекинд говорит о множестве чисел (действительных или комплексных), где операции сложения и умножения коммутативны, поэтому его определение – это определение поля, и мы будем использовать его и там, где Дедекинд использует термин «тело». Для множеств с операциями сложения и умножения Дедекинд пользовался термином «порядок» (*Ordnung*). Поскольку в математике так называются и другие понятия, то Гильберт в 1897 г. заменил его современным термином «кольцо» (*Ring*).

Мы будем пользоваться иными обозначениями, чем у Дедекинда, а также говорить о множестве чисел там, где он говорит о системе чисел. Теорию множеств тогда только начал разрабатывать Кантор. Дедекинд вводит понятие модуля (и сам этот термин): «Система M действительных и комплексных чисел, суммы и разности которых принадлежат этой же системе, называется модулем». В настоящее время K-модулем называется линейное пространство над кольцом K. Вместе с любыми своими элементами x, y оно содержит и $\lambda x+\mu y$, где $\lambda,\mu\in K$.

На самом деле Дедекинд дает определение $\mathbb{Z}$-модуля, так как вместе с элементами x, y модуля в нем содержится и $mx+ny$, где $m,n\in\mathbb{Z}$. Он вводит и исследует понятие базиса модуля.

Дедекинд дает определение идеала кольца (для числовой системы): множество A в кольце K называется идеалом, если произведение любого числа из кольца K на число из A принадлежит A. Говорят также, что идеал кольца замкнут относительно умножения на элементы кольца. Имеется простой способ построения идеалов (возможно, не всех). Если число α принадлежит кольцу K, то множество всех чисел кольца, кратных числа α, т. е. делящихся на α, очевидно, является идеалом кольца K. Говорят, что такой идеал порожден числом α и обозначают через (α). Такие идеалы Дедекинд называет главными, они имеют вид $A=\{\alpha x, x\in K\}=\alpha K$.

В частности, в кольце $\mathbb{Z}$ целых чисел множество $m\mathbb{Z}$ чисел, кратных числа m, является главным идеалом, порожденным числом m. Происхождение термина «идеал» указывает на сходство роли идеалов с идеальными числами Куммера в теории делимости числовых систем. Но идеалы – это не числа, а подмножества кольца, которые определены выше.

Целые алгебраические числа, которые рассматривались Куммером, а до него и некоторыми другими математиками, имели вид $b_0 + b_1\theta + \ldots + b_{n-1}\theta^{n-1}$, где $b_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, а θ – некоторое целое алгебраическое число. Они образуют кольцо $\mathbb{Z}[\theta]$ (точнее, $\mathbb{Z}$ – модуль с базисом $1,\theta,\ldots,\theta^{n-1}$), здесь строилась теория делимости.

Дедекинд обобщает вопрос, рассматривая поле $\mathbb{Q}(\theta)$, которое получается присоединением к полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$ некоторого корня θ неприводимого над $\mathbb{Q}$ уравнения $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ с целыми коэффициентами, т. е. присоединением целого алгебраического числа. В поле $\mathbb{Q}(\theta)$ он рассматривает кольцо целых алгебраических чисел. Обозначим это кольцо через O. Дедекинд строит в кольце O теорию делимости с помощью идеалов.

Пусть A – идеал в O. Если α,β принадлежат кольцу O и $\alpha - \beta \in A$, то Дедекинд пишет $\alpha \equiv \beta(\mathrm{mod}\,A)$ и отмечает, что такие сравнения можно складывать, вычитать и умножать на число. Отношение сравнения по модулю идеала A разбивает все числа кольца O на непересекающиеся классы, состоящие из сравнимых по модулю идеала A чисел, – классы вычетов по модулю идеала A. Эти классы можно складывать и перемножать, они образуют кольцо, которое обозначается через O/A и называется кольцом классов вычетов по модулю идеала или факторкольцом кольца O по идеалу A.

Дедекинд определяет делимость идеалов следующим образом. Он говорит, что если A и B – идеалы, причем $A \subset B$, то A делится на B (или A является кратным B, или B – делителем A). Таким образом, теоретико-множественный термин «содержаться в» является здесь заменой теоретико-числового «делиться на». Это определение можно проиллюстрировать примером: для идеалов $A = \{6x, x \in O\}$ и $B = \{2x, x \in O\}$ имеет место включение $A \subset B$ и $6x$ делится на $2x$.

Все кольцо O является идеалом и содержит все идеалы этого кольца, поэтому оно является делителем любого идеала, т. е. кольцо O играет роль единицы для

идеалов. Пересечение $A \cap B$ идеалов A и B (т. е. множество всех элементов, общих для A и B) Дедекинд называет наименьшим общим кратным этих идеалов. Наибольшим общим делителем идеалов A и B Дедекинд называет множество всех чисел вида $\alpha + \beta$, где $\alpha \in A$, $\beta \in B$. (Объединение $A \cup B$ идеалов A и B не обязано быть идеалом.) Дедекинд называет идеал P простым, если P не содержится ни в каком идеале, кроме единичного идеала O (т. е. делится только на себя и единичный идеал). (В настоящее время такой идеал называют максимальным; в случае колец Дедекинда он совпадает с простым.) Действия сложения и вычитания на идеалы, как и на дивизоры, не распространяются. Произведение AB идеалов определяется как множество всех конечных сумм вида $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_i$. Для деления вводятся дробные идеалы. В итоге Дедекинд доказал основную теорему: всякий идеал A в O, отличный от O, либо является простым, либо допускает представление и притом единственным способом в виде произведения простых идеалов.

В XX в. понятие идеала вышло за рамки теории алгебраических чисел и стало рассматриваться как подобъект в некоторых алгебраических структурах (кольцах, полугруппах, алгебрах, решетках), замкнутый относительно умножения на элементы этих структур. Гомоморфизмом называется отображение колец (групп), которое сохраняет их операции, т. е. сумму элементов переводит в сумму, а произведение – в произведение. Ядром гомоморфизма называется множество тех элементов кольца (группы), которые он переводит в нулевой элемент кольца (нейтральный элемент группы). Идеалы в кольцах и нормальные подгруппы в группах играют сходную роль: они являются ядрами гомоморфизмов.

Теория модулей и идеалов Дедекинда явилась для него поводом к тому, чтобы разработать (в конце XIX в.) на аксиоматической основе в духе современной абстрактной алгебры теорию решеток. Он называл их дуальными группами, а в первой половине XX в. их называли «структурами» (алгебраическими). Затем термин «структура» стали использовать в ином смысле. Решетка – это частично упорядоченное множество с двумя операциями, которые обычно обозначают через $\cup$ и $\cap$, и с обычными аксиомами для объединения и пересечения. Конкретными примерами решеток являются множество всех подмножеств какого-либо множества, а также алгебра высказываний (алгебра Буля). Некоторые свойства решеток изучил

немецкий математик Э. Шрёдер и изложил в своих «Лекциях по алгебре логики», изданных в 1890–1905 гг.

В [289] в очерке о Галуа приведены некоторые сведения о теории Галуа в том ее виде, в котором она была представлена Галуа и Жорданом. Дедекинд превратил ее в общую теорию, не связанную непосредственно с вопросом о решении уравнений в радикалах. Он изложил ее на теоретико-множественной основе в своей теории расширения полей. В таком виде теория Галуа излагается и в настоящее время, например в книге М. М. Постникова «Основы теории Галуа» (М.: Физматгиз, 1960. – 124 с.). Приведем некоторые сведения о расширениях числовых полей и теории Галуа в том виде, в котором ее представил Дедекинд. Большое число новых понятий затрудняют восприятие этого материала.

Поле K называется расширением поля k, если k является его подполем. Расширение K поля k записывают в виде K/k. Через $k(A)$ обозначают расширение поля k, полученное присоединением к полю k некоторого множества A. Если $A=\{\alpha\}$ состоит из одного элемента α, то поле $k(\alpha)$ называется простым расширением поля k. Расширение K поля k называется конечным, если поле K, рассматриваемое как линейное пространство над полем k, имеет конечную размерность n, число n называется степенью расширения и обозначается $[K:k]$.

Элемент θ расширения поля k называется алгебраическим над k, если он является корнем некоторого многочлена с коэффициентами из k, при этом расширение $k(\theta)$ называется простым алгебраическим расширением поля k. Расширение K поля k называется алгебраическим над k, если каждый элемент из K является алгебраическим над k. Например, множество чисел вида $a+b\sqrt{2}$, где $a,b\in\mathbb{Q}$, является алгебраическим расширением поля $\mathbb{Q}$, так как $a+b\sqrt{2}$ – корень уравнения $x^2-2ax+a^2-2b^2=0$. Каждое конечное расширение K поля k является алгебраическим над k и получается из k присоединением конечного числа алгебраических над k элементов, обратное тоже верно.

Полем разложения неприводимого над полем k многочлена называется наименьшее расширение поля k, содержащее все корни этого многочлена. Например, поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел является полем разложения многочлена x^2+1 над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Нормальным расширением поля k называется алгебраическое над k расширение K/k такое, что каждый неприводимый над k многочлен, имеющий в K хоть один корень, разлагается в K на линейные множители. Поля разложения многочленов над k являются нормальными расширениями. Вообще, расширение поля k, полученное из k присоединением к полю k всех корней одного или любого числа многочленов над k, является нормальным. И обратно, любое нормальное расширение поля k получается присоединением к полю k всех корней некоторого множества многочленов над k.

Взаимно однозначное отображение группы G на себя, сохраняющее групповую операцию, называется автоморфизмом. Иными словами, это изоморфизм группы G на себя. Группа всех автоморфизмов группы G обозначается $\mathrm{Aut}\, G$.

Взаимно однозначное отображение S поля K на себя называется автоморфизмом, если для любых элементов $\alpha, \beta \in K$ оно переводит их сумму – в сумму, а произведение – в произведение. Пусть поле K является нормальным расширением поля k. Группа всех тех автоморфизмов поля K, которые переводят в себя все элементы поля k, т. е. оставляют их на месте, называется группой Галуа поля K над полем k, или группой Галуа расширения K/k. Она обозначается через $\mathrm{Gal}(K/k)$ или $\mathrm{G}(K/k)$. Это определение группы Галуа в теории числовых полей дал Дедекинд. Порядок (число элементов) группы $\mathrm{G}(K/k)$ равен степени расширения K над k.

Каждой подгруппе H группы $\mathrm{G}(K/k)$ соответствует подполе P поля K, состоящее из всех тех элементов поля k, которые не меняются под действием автоморфизмов из H. Обратно, каждому подполю $P \subset K$ (содержащему поле k) соответствует подгруппа H группы $\mathrm{G}(K/k)$, состоящая из всех автоморфизмов, которые оставляют на месте каждый элемент поля P. При этом поле K является нормальным расширением поля P и $\mathrm{G}(K/P) = H$. Основная теорема теории Галуа утверждает, что эти соответствия взаимно однозначны. Таким образом, описание всех подполей поля K сводится к описанию всех подгрупп группы $\mathrm{G}(K/k)$, что является более простой задачей.

Подгруппа H является нормальной подгруппой (нормальным делителем) группы $G = \mathrm{G}(K/k)$ тогда и только тогда, когда соответствующее ей подполе P

является нормальным расширением поля k, при этом группа $\mathrm{G}(P/k)$ изоморфна факторгруппе G/H. Возрастающей цепочке $k = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_m = K$ подполей поля K отвечает убывающая цепочка $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_m = \{e\}$ подгрупп группы $G = \mathrm{G}(K/k)$, где $G_i = \mathrm{G}(K/K_i)$. Эта цепочка подгрупп является нормальным рядом (т. е. G_i – нормальная подгруппа в G_{i-1}, $i = 1,\ldots,m$) тогда и только тогда, когда K_i – нормальное расширение подполя K_{i-1}. В этом случае группа $\mathrm{G}(K_i/K_{i-1})$ изоморфна факторгруппе G_{i-1}/G_i.

Связь группы Галуа $\mathrm{G}(K/k)$ с вопросом о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах заключается в следующем. Пусть $f(x)$ – неприводимый многочлен над основным полем k и пусть он не имеет кратных корней. Группой Галуа многочлена $f(x)$ (или уравнения $f(x) = 0$) называется группа $\mathrm{G}(K/k)$ его поля разложения K. Это поле можно представить в виде $K = k(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, где $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ – все корни многочлена $f(x)$ (пронумерованные в некотором порядке). Подгруппам G_i нормального ряда соответствуют подполя K_i, которые являются полями разложения соответствующих многочленов $f_i(x)$ таких, что исходное уравнение $f(x) = 0$ сводится к решению цепи уравнений $f_i(x) = 0$, $i = 1,\ldots,m$, меньших степеней.

Автоморфизмы группы Галуа $\mathrm{G}(K/k)$ переводят корни уравнения $f(x) = 0$ снова в его корни, но, вообще говоря, расположенные в ином порядке. Таким образом, группа Галуа алгебраического уравнения изоморфна группе (или подгруппе) подстановок его корней. Алгебраическое уравнение разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда разрешима его группа Галуа (см. также [289, с. 116]).

Теория Галуа, изложенная Дедекиндом для числовых полей, уже в XIX в. вышла за рамки вопроса о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. В XX в. вместо числовых полей рассматриваются поля с элементами произвольной природы. Основными задачами этой теории становятся: описание всех подполей данного поля, всех его расширений, классификация полей с точностью до изоморфизма, изучение групп автоморфизмов поля. Вопрос о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах – всего лишь частный вопрос, с которого началось создание общей теории полей в алгебре. Аналогично, вопрос о

разрешимости дифференциальных уравнений в квадратурах послужил поводом к созданию обширной теории групп и алгебр Ли как важного раздела алгебры. Теорема Ферма – лишь частный вопрос теории чисел. Но попытки доказать ее, предпринятые начиная с середины XVII в., и притом не теми средствами, которыми было получено ее полное доказательство в конце XX в., привели к созданию теорий дивизоров и идеалов, играющих большую роль в ряде разделов современной математики.

По-иному, чем Дедекинд, разрабатывал теорию алгебраических чисел немецкий математик **Леопольд Кронекер (1823–1891)**. Он родился в Германии в г. Лигниц (ныне Легница в Польше). В гимназии его учителем был Э. Куммер. Кронекер окончил Берлинский университет, где на него большое влияние оказал Дирихле. В 1861 г. Кронекер был избран в члены Берлинской академии наук, с 1883 г. – профессор Берлинского университета. Основные его работы относятся к алгебре и теории чисел. Широкую известность получили его радикальные взгляды на арифметизацию математики: он предлагал выбросить из теоретической математики все то, что не может быть получено путем алгебраических операций над целыми числами, выступал против принципов теории функций Вейерштрасса и теории множеств Кантора, являясь предшественником конструктивного направления в математике.

Куммер строил теорию делимости в кольце $\mathbb{Z}[\zeta]$, которое получается присоединением к кольцу $\mathbb{Z}$ целых чисел кругового целого ζ, для этого он вводил идеальные числа. Дедекинд в поле $\mathbb{Q}(\theta)$, где θ – алгебраическое число, рассматривал кольцо $\mathbb{Z}[\theta]$ (мы его обозначили через O) целых алгебраических чисел, в котором строил теорию делимости с помощью идеалов. Кронекер рассматривает более общее расширение поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, а именно поле $\mathbb{Q}(\alpha)$, которое получается присоединением к $\mathbb{Q}$ неопределенного абстрактного элемента α. Это равносильно присоединению к $\mathbb{Q}$ трансцендентного числа α. Символ α неопределенный, будем вместо него писать x. Кронекер показал, что поле $\mathbb{Q}(x)$ изоморфно полю рациональных функций (отношений многочленов) с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$. Множество многочленов $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ с целыми коэффициентами в поле $\mathbb{Q}(x)$ образует кольцо $\mathbb{Z}[x]$. Обобщая метод Куммера, Кронекер строит в кольце

□ $[x]$ теорию делимости с помощью дивизоров – аналогов идеальных чисел Куммера. Кронекер рассматривает и общий случай, присоединяя к полю □ несколько неопределенных символов и алгебраических чисел, при этом его теория очень усложняется.

В 1887 г. Кронекер снова обратился к полю □ (θ), т. е. к алгебраическому расширению поля □, когда присоединяемый элемент θ является корнем неприводимого над □ многочлена $P(x)$. В 1847 г. Коши для алгебраического обоснования арифметических операций над комплексными числами использовал сравнения соответствующих многочленов по модулю многочлена x^2+1, при этом результат операции определялся как значение при $x=i$ вычета сравнения (см. [289], с. 91–92). Кронекер аналогично обосновал операции над элементами поля □ (θ) с помощью сравнений по модулю многочлена $P(x)$, корнем которого является алгебраическое число θ. Он также показал, что каждое поле алгебраических чисел изоморфно некоторому полю классов вычетов (классов эквивалентности) □ $[X]/(f(x))$, где $f(x)$ – многочлен, неприводимый над полем □ рациональных чисел, а □ $[X]$ – кольцо многочленов с коэффициентами из □ . Теория Кронекера охватила числовые поля Дедекинда и поля рациональных функций.

Немецкий математик Г. Вейль (1885–1955) в своей книге «Алгебраическая теория чисел» (русский перевод 1947 г.) пишет, что теория Кронекера является более фундаментальной, а теория Дедекинда – более законченной. Трудные работы Кронекера по теории алгебраических чисел и полей не были по достоинству оценены современниками, в отличие от ясно написанных работ Дедекинда. Достоинство работ Кронекера выяснилось в XX в., когда были построены общая теория расширения полей, теория дивизоров на алгебраическом многообразии (или в кольце функций на многообразии), а факторизация (разбиение множеств на классы эквивалентности) стала широко использоваться в различных разделах математики.

Одним из основателей теории алгебраических чисел является русский математик **Егор Иванович Золотарев (1847–1878)**. Он родился в Петербурге в семье владельца часового магазина. Окончил физико-математический факультет Петербургского университета, где слушал лекции П. Л. Чебышева и А. Н. Коркина.

В 1868 г. начал работать приват-доцентом в этом университете. В 1874 г. защитил докторскую диссертацию «Теория целых комплексных чисел с приложением к интегральному исчислению». С 1876 г. – профессор университета, член Петербургской академии наук. В 1872 и 1876 гг. Золотарев побывал в научных командировках в Берлине и Париже. Летом 1878 г. он в возрасте 31 года погиб, попав неизвестным образом под поезд.

Главные работы Е. И. Золотарева относятся к теории чисел, теории алгебраических функций и к теории наилучшего приближения функций многочленами. Мы лишь в общих чертах скажем о его общем оригинальном построении в поле $\square(\theta)$ теории делимости алгебраических чисел, которую он осуществил в двух работах, опубликованных в 1878 и 1880 гг. Вторая из них под названием «К теории комплексных чисел» была опубликована посмертно в «Журнале чистой и прикладной математики», издававшемся Лиувиллем. (В XIX в. комплексными числами называли и алгебраические числа.)

Е. И. Золотарев дает следующее более общее определение целого алгебраического числа: «Каждое комплексное число $y = a + bx + \ldots + lx^{n-1}$, где $a, b, \ldots, l$ – рациональные числа, будем называть целым числом, если оно удовлетворяет уравнению вида (α)», т. е. уравнению $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – обычные целые числа. Далее он переходит, по существу, к рассмотрению p-целых чисел, хотя он так не называет их. Пусть p – простое число. Рациональное число $\frac{m}{n}$ называют p-целым, если m и n взаимно простые, а его знаменатель n не делится на p. Алгебраическое число α называется p-целым, если оно удовлетворяет уравнению вида $x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n = 0$ с p-целыми коэффициентами.

Дедекинд строит теорию делимости сразу во всем кольце O, поэтому его подход называют глобальным. Золотарев сначала решает вопрос, как говорят, локально, а потом переходит к кольцу O.

Кольцо A называется локальным, если оно имеет единственный максимальный идеал, отличный от самого A. Примером локального кольца является множество всех рациональных чисел вида $\frac{m}{n}$, знаменатели которых не делятся на фиксированное

простое число p. Это кольцо обозначают через $\mathbb{Z}_{(p)}$, его единственным максимальным идеалом является (p), т. е. главный идеал, порожденный числом p.

Кольцо A называется полулокальным, если оно имеет конечное число максимальных идеалов. Первое такое кольцо, а именно кольцо O_p всех p-целых чисел из $\mathbb{Q}(\theta)$ и было исследовано Золотаревым. Он не пользуется понятием идеала, а использует, подобно Куммеру, понятие «идеального множителя» и показывает, что в кольце O_p существует только конечное число идеальных простых множителей. Далее Золотарев доказывает, что число в поле $\mathbb{Q}(\theta)$ будет целым алгебраическим тогда и только тогда, когда оно является p-целым для всех p. Это означает, что $O = \bigcap_p O_p$, т. е. производится глобализация – переход от полулокальных колец O_p к кольцу O. В итоге получается теория делимости p-целых чисел в кольце O. Золотарев не вводит понятий «кольцо», тем более «полулокальное кольцо», но его способы рассуждений равносильны использованию этих понятий. И Куммер, и Золотарев в своих вычислениях ограничиваются определением показателя, с которым идеальный множитель входит в целое число.

Теорию делимости алгебраических чисел, приведенную Золотаревым, было трудно понять его современникам. Кронекер, поверхностно ознакомившись с некоторыми результатами Золотарева, неодобрительно отозвался о его теории.

О Золотареве: [21, вып. 2, с. 233–351; 107, с. 98–107; 228].

Через 30 лет после Золотарева немецкий математик **Курт Гензель (1861–1941)** рассматривал «целые по $\operatorname{mod} p$» алгебраические числа, т. е. p-целые числа, а также локальное кольцо таких чисел. Но главной заслугой Гензеля является то, что он в статье 1899 г. ввел так называемые p-адические числа. Не вникая в детали, отметим, что построение p-адических чисел основывалось на введении Гензелем p-адической нормы для рациональных, а также для p-адических чисел. Она определяется для рациональных чисел следующим образом. Пусть p – фиксированное простое число. Каждое рациональное число $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, можно единственным способом представить в виде $r = \frac{s}{t} \cdot p^k$, где s, t взаимно простые и не делятся на p, а k – целое.

По определению, p-адической нормой числа r называется $|r|_p = p^{-k}$, $|0|_p = 0$. Например, пусть $p = 3$, тогда число $\frac{36}{7} = \frac{4}{7} \cdot 3^2$ имеет норму $\left|\frac{36}{7}\right|_3 = 3^{-2}$.

Норма $|\ |_p$ удовлетворяет неравенству $|a+b|_p \le \max\left(|a|_p, |b|_p\right)$, поэтому называется неархимедовой. Такому же неравенству удовлетворяют и p-адические числа. Они образуют поле $\mathbb{Q}_p$. Каждое p-адическое число a можно представить в виде ряда $a = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k p^k$, где k_0–некоторое целое число, a_k– это p-ичные знаки числа a, т. е. числа из множества $\{0,1,\ldots,p-1\}$, $a_{k_0} \ne 0$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, членами которого являются p-адические числа, сходится в поле $\mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда $|c_n|_p \to 0$ при $n \to \infty$.

Число $a \in \mathbb{Q}_p$ такое, что его разложение в ряд не содержит отрицательных степеней p (т. е. для него $|a|_p \le 1$), называется целым p-адическим числом. Множество $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел является кольцом в поле $\mathbb{Q}_p$.

Поля $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и, соответственно, их конечные расширения $\mathbb{Q}(\theta)$, $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ являются примерами бесконечных полей, т. е. содержат бесконечно много элементов. Конечные поля, т. е. поля с конечным числом элементов, называют также полями Галуа по имени их первого исследователя и имеют общее («абстрактное») обозначение F_q или $\mathrm{GF}(q)$, где q – число элементов поля. Поле называется простым, если оно не имеет собственного подполя. Такими являются поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и поле $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/(p)$ классов вычетов по простому модулю p.

Вместе с понятием поля возникло и понятие его характеристики. Приведем одно из ее определений. Пусть F – поле, оно содержит элементы «единица» и «нуль», которые обозначим, соответственно, через 1 и 0. Пусть существует наименьшее целое положительное число n такое, что сумма $1+1+\ldots+1$ n слагаемых равна элементу 0. Такое число n является простым числом p, оно называется характеристикой поля F и обозначается через $\mathrm{char}\,F$. Если же сумма $1+1+\ldots+1$ при любом количестве слагаемых отлична от элемента 0, то принято считать

характеристику поля равной числу 0. (Впрочем, иногда говорили, что в этом случае характеристика поля равна ∞ или что это поле без характеристики.)

Числовые поля имеют характеристику 0. Поле $\mathbb{Z}/(p)$ классов вычетов по простому модулю p имеет характеристику p и состоит из p элементов. Всякое поле нулевой характеристики содержит подполе, изоморфное полю $\mathbb{Q}$, а поле конечной характеристики p содержит подполе, изоморфное $\mathbb{Z}/(p)$.

К рассмотренным выше полям добавилось поле формальных степенных рядов, которое ввел в 1891 г. итальянский математик Д. Веронезе (1854–1917). В 1897 г. немецкий математик Д. Гильберт (1862–1943) опубликовал знаменитый обзор теории полей алгебраических чисел «Zahlbericht» объемом в 400 страниц. Здесь он дал систематическое изложение теории числовых полей на основе журнальных статей его современников. Он унифицировал обозначения и термины, заполнил пробелы в доказательствах и дал программные наброски теории, получившей известность как «теория полей классов», т. е. теория конечных расширений Галуа (нормальных сепарабельных расширений) с абелевой группой Галуа для различного вида полей: глобальных (поле алгебраических чисел, поле алгебраических функций одной переменной над конечным полем) и локальных (конечные расширения поля p-адических чисел, поле формальных степенных рядов). Немецкий математик Э. Штейниц (1871–1928) выделил абстрактные понятия, общие для полей, в фундаментальном труде «Алгебраическая теория полей» (1910), который можно считать началом абстрактной алгебры. Книги Гильберта и Штейница знаменовали появление нового раздела алгебры – коммутативной алгебры, изучающей объекты, обладающие свойством коммутативности – коммутативные кольца (в частности поля), абелевы (коммутативные) группы и др.

5. **Возникновение некоммутативной алгебры.**

Объекты и понятия, относящиеся к некоммутативной алгебре, появились в XIX в. при обобщении понятия комплексного числа. Первая попытка такого рода была предпринята даже несколько раньше. Датский математик К. Вессель, первым предложивший геометрическую интерпретацию комплексных чисел (как направленных отрезков) в работе «Опыт аналитического представления направления»

(1799), здесь же сделал попытку распространить комплексные числа на трехмерный случай. Он ставит в соответствие точке (x, y, z) выражение $x + y\varepsilon + z\eta$, где ε и η – две мнимые единицы. Эти аналоги векторов он применяет к решению задач на сферические многоугольники. Его работа, написанная на датском языке, оставалась неизвестной математикам до конца XIX в. Построения аналогов комплексных чисел были предприняты затем британскими математиками, начиная с 30-х гг. XIX в. – Гамильтоном, Кэли и др. В течение ста лет обобщения комплексных чисел называли «гиперкомплексными системами», а элементы этих систем – «гиперкомплексными числами». В настоящее время «гиперкомплексные системы» называют алгебрами конечного ранга (конечной размерности).

Алгеброй A над полем K называется кольцо, которое является одновременно и векторным (линейным) пространством над полем K. Таким образом, в этой алгебре определены:

1) операция сложения ее элементов, удовлетворяющая аксиомам векторного (линейного) пространства над полем K;
2) операция умножения ее элементов, дистрибутивная относительно операции сложения и перестановочная относительно умножения ее элементов на элементы из поля K (перестановочность здесь означает: $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)\ \forall\alpha \in K\ \ \forall a, b \in A$).

Элементы алгебры A часто называют векторами, а элементы поля K – скалярами. Если алгебра как векторное пространство имеет конечную размерность n (т. е. в ней существует базис из n элементов), то она называется алгеброй конечного ранга (или размерности n). В определении алгебр над полем обычно не требуют условие коммутативности умножения их элементов. Если же оно выполняется, то говорят о коммутативной алгебре над полем. Алгебра над полем называется алгеброй с делением, если в ней операция умножения элементов обратима. Такие алгебры являются телами, а в случае коммутативности умножения – полями. Примерами таких алгебр являются числовые кольца и поля, рассматривавшиеся в предыдущем пункте 4. Теперь же нас интересуют алгебры, где условие коммутативности умножения не выполняется. Если умножение в алгебре ассоциативно, то говорят об ассоциативной алгебре, в противном случае – о неассоциативной.

Важными объектами некоммутативной алгебры являются кватернионы. Их открыл в 1843 г. выдающийся ирландский математик **Уильям Роуен Гамильтон**

(1805–1865). Это открытие произвело огромное впечатление на математиков. Очерк о Гамильтоне приведен нами в [289] на с. 199 – 203. Повторим главные сведения о кватернионах.

Кватернионы – это числа вида $q = a + bi + cj + dk$, где a, b, c, d – действительные числа, а единицы $1, i, j, k$ удовлетворяют соотношениям

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Можно определить для кватерниона q сопряженный к нему кватернион $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ и проверить, что $q\overline{q} = \overline{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Число $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ называется модулем кватерниона q. Если q_1 и q_2 – кватернионы, то $|q_1 q_2| = |q_1||q_2|$, это подтверждает аналогию между кватернионами и комплексными числами. Число $N = |q|^2$ называется нормой кватерниона q, причем $N(q_1 q_2) = N(q_1)N(q_2)$. Обратным к кватерниону q является кватернион $|q|^{-2}\,\overline{q}$. Операция умножения кватернионов некоммутативна, но она является ассоциативной (сам термин «ассоциативность» был введен Гамильтоном в связи с кватернионами в работе 1843 г., а термины «коммутативность» и «дистрибутивность» ввел французский математик Ф. Ж. Сервуа в 1815 г.).

Алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ представляет собой тело и является исторически первым примером некоммутативной алгебры с делением. Это 4-мерная алгебра с базисом $1, i, j, k$. В этом линейном пространстве можно ввести евклидову метрику, считая за расстояние между кватернионами p и q модуль $|p - q|$ их разности.

Как уже отмечалось выше, Гамильтон в 1845 г. дает понятие вектора (из понятия кватерниона при $a = 0$) и сам термин «вектор», а также выражения для скалярного и векторного произведений. Умножение двух векторов $\alpha = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ и $\beta = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ как кватернионов дает

$$(a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_1 i + b_2 j + b_3 k) = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) +$$
$$+(a_2 b_3 - a_3 b_2)i + (a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k = -(\alpha, \beta) + [\alpha, \beta],$$

где (α, β) – скалярное произведение векторов α и β, а $[\alpha, \beta]$ – векторное. Так назвал эти произведения американский физик и математик Дж. У. Гиббс (1839–1903)

в своих лекциях «Элементы векторного анализа», опубликованных в 1881–1884 гг. Он обозначает векторы греческими буквами, а скалярное и векторное произведения векторов α и β соответственно через $\alpha \cdot \beta$ и $\alpha \times \beta$.

В работе «Об эллиптических функциях Якоби и о кватернионах» (1845) английский математик **Артур Кэли (1821–1895)** привел обобщение кватернионов – октавы (от латинского *octo* – «восемь»). В 1843 г. их открыл ирландский математик Джон Гревс. Алгебру октав обычно называют алгеброй Кэли и обозначают H^2. Это 8-мерная алгебра, ее можно ввести процедурой «удвоения» кватернионов следующим образом.

Пусть $q = a + bi + cj + dk$ и $p = A + Bi + Cj + Dk$ – два кватерниона. Элементами алгебры октав являются выражения

$$\xi = q + pe = a + bi + cj + dk + Ae + BI + CJ + DK,$$

где $I = ie$, $J = je$, $K = ke$. Базис в алгебре октав состоит из числа 1 и еще семи элементов i, j, k, e, I, J, K. Квадрат каждого из этих семи элементов равен -1, а их попарные произведения схематически изображаются рисунком 2. Произведение любых двух из указанных семи элементов равняется с точностью до знака элементу, расположенному на той же прямой (или окружности), а знак определяется указанной ориентацией. Например, $ij = k = -ji$, $Ik = J = -kI$, $kJ = I = -Jk$, $JI = k = -IJ$.

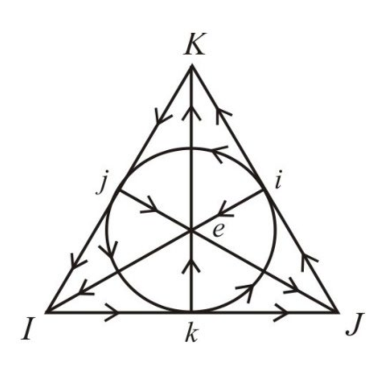


Рис. 2

Для октавы ξ вводится сопряженная ей октава

$$\bar{\xi} = a - bi - cj - dk - Ae - BI - CJ - DK$$

и показывается, что

$$\xi\bar{\xi} = \bar{\xi}\xi = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2.$$

Последнее выражение обозначают через $|\xi|^2$, это квадрат модуля $|\xi|$ октавы. Если ξ и η – октавы, то $|\xi\eta| = |\xi||\eta|$. Алгебра октав некоммутативна и неассоциативна, но она является альтернативной, т. е. для любых двух ее элементов ξ и η выполнены тождества

$$(\xi\eta)\eta = \xi(\eta\eta), \qquad \xi(\xi\eta) = (\xi\xi)\eta .$$

Алгебра октав является алгеброй с делением, для октавы $\xi \neq 0$ обратной является октава $|\xi|^{-2}\,\overline{\xi}$.

Немецкий математик **Ф. Г. Фробениус (1849–1917)** в 1878 г. доказал теорему:

Любая конечномерная ассоциативная алгебра с делением изоморфна одной из трех: полю $\mathbb{R}$ действительных чисел, полю $\mathbb{C}$ комплексных чисел или телу H кватернионов.

Позже был доказан более общий результат, который обычно называют обобщенной теоремой Фробениуса:

Любая конечномерная альтернативная алгебра с делением изоморфна одной из четырех: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, H или алгебре октав H^2.

Недавно американский математик Дж. Ф. Адамс с помощью глубоких топологических соображений доказал, что и для неальтернативных алгебр с делением над полем $\mathbb{R}$ их размерность может иметь только значения 1, 2, 4, 8 (при этом существуют алгебры с делением размерности 4 и 8, отличные от H и H^2).

Если в алгебре A для любых двух ее элементов x, y можно ввести скалярное произведение (x, y) так, что $|x| = \sqrt{(x, x)}$ и при этом $|xy| = |x||y|$, то алгебра A называется нормированной. В 1898 г. немецкий математик **Адольф Гурвиц (1859–1919)** доказал теорему:

Любая нормированная алгебра с единицей изоморфна одной из четырех алгебр: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, H или H^2.

Популярным введением в теорию кватернионов и октав, содержащим доказательства теорем Гурвица и Фробениуса, является книга И. Л. Кантора и А. С. Солодовникова «Гиперкомплексные числа» (М.: Наука, 1973. – 144 с.).

Кроме кватернионов и октав, в XIX в. были найдены и другие обобщения комплексных чисел, в том числе «триплеты» Чарльза Гревса (брата Джона Гревса) [51, с. 325–326], алгебры Г. Г. Грассмана и У. К. Клиффорда [51, с. 337–338] (об алгебре Грассмана см. также выше на с. 7-8). Алгебра Клиффорда отличается от алгебры Грассмана тем, что произведение базисных элементов у Клиффорда не равно нулю при наличии одинаковых сомножителей, а вычисляется с учетом правила $e_i^2 = -1$ (например $e_1 e_2 e_1 = -e_1^2 e_2 = e_2$). Алгебры Грассмана и Клиффорда ассоциативны. Алгебра Грассмана связана с определением объема n-мерного пространства, а алгебра Клиффорда – с вращением многомерных пространств.

Американский математик **Бенджамин Пирс (1809–1880)**, профессор Гарвардского университета, в работе «Линейные ассоциативные алгебры» (1881) дал общее определение алгебры как n-мерного линейного пространства, в котором задано ассоциативное умножение векторов, дистрибутивное относительно сложения и перестановочное с умножением вектора на число. В настоящее время в общее определение алгебры обычно не вносят условие ассоциативности умножения векторов. Если оно есть, то говорят об ассоциативной алгебре, а если нет – о неассоциативной. Примерами неассоциативных алгебр являются алгебра октав и алгебра векторов трехмерного пространства с обычным векторным умножением.

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базисные векторы алгебры, то для задания умножения векторов достаточно задать умножение базисных векторов $e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k$. Эти формулы называются формулами структуры алгебры, а числа C_{ij}^k – структурными константами алгебры. Пирс ввел понятие нильпотентных элементов – таких элементов e, для которых существует число $r \in \mathbb{N}$ такое, что $e^r = 0$ (к ним относятся, например, все базисные элементы алгебры Грассмана), и идемпотентных элементов – таких элементов e, для которых $e^2 = e$.

Общую теорию алгебр разрабатывал и изложил в своих лекциях К. Вейерштрасс в 1861 г., а опубликовал в работе «К теории комплексных величин, образованных из главных единиц» (1884). Он ввел понятие прямой суммы нескольких алгебр: если даны алгебры со своими базисами, то их прямой суммой называется алгебра, базис которой состоит их всех этих базисов, а произведение элементов разных базисов равно нулю. При этом он показал, что всякая коммутативная алгебра

без нильпотентных элементов является прямой суммой нескольких полей действительных или комплексных чисел.

Поля, тела и алгебры являются частными случаями понятия кольца. Выше в пункте 4 говорилось об идеалах кольца. Тривиальными идеалами кольца являются само кольцо и идеал, состоящий из одного нуля. Важнейшими видами колец являются простые кольца, т. е. кольца, не имеющие нетривиальных двусторонних идеалов. Так же определяется и понятие простой алгебры. Глубокие связи между ассоциативными алгебрами и алгебрами Ли привели к тому, что в конце XIX в. ассоциативными алгебрами занимался как сам С. Ли, так и его ученики Г. Шефферс и Ф. Г. Фробениус.

Сначала независимо, а затем в контакте со школой Ли в этой области работал **Федор (Теодор) Эдуардович Молин (1861–1941)**. В 1883 г. он окончил Дерптский университет (ныне Тартуский университет в Эстонии). В том же году был в научной командировке в Лейпциге, где слушал лекции Ф. Клейна и К. Неймана. Вернувшись в Дерпт, защитил магистерскую диссертацию, а в 1892 г. – докторскую. Работал в Дерптском университете до 1900 г. В 1900–1917 гг. – профессор Томского технологического института, с 1917 г. – профессор Томского университета.

Докторская диссертация Ф. Э. Молина «О системах высших комплексных величин» была опубликована в Дерпте в 1892 г. и в журнале *Mathematische Annalen* в 1893 г. В ней исследуется числовая алгебра в общем виде, но без термина «алгебра». Шеферс в работе 1891 г. называет алгебры «комплексными числовыми системами», Фробениус в работе 1903 г. – «системами гиперкомплексных величин», а введенный Пирсом в 1881 г. термин «алгебра» для таких систем не использовался в течение 50 лет. В конце XIX в. на ассоциативные алгебры были распространены понятия простой и полупростой алгебры, возникшие первоначально в теории алгебр Ли. Об определении простой алгебры говорилось выше. Полупростой называется алгебра, в которой нет нильпотентных элементов.

Высокую оценку результатам Молина дали Г. Фробениус, Э. Нётер, Н. Г. Чеботарев, Н. Бурбаки и др. В частности, Н. Бурбаки пишет: «Наконец, Молин [161a] ввел фактoралгебру некоторой алгебры… Здесь очень ясна аналогия с группами… Наиболее важные результаты этого периода [речь идет о 90-х гг. XIX в.] принадлежат Ф. Молину [161a]: руководствуясь понятием простой группы, он

опередил простые алгебры (над □) и показал, что они являются алгебрами матриц; далее, он показал, что структура произвольной алгебры конечного ранга над □ сводится по существу к случаю (уже изученному Шеферсом), когда факторалгебра по радикалу является прямой суммой тел.» [8, с. 116]. Имя Молина носит теорема: всякая простая ассоциативная алгебра конечного ранга над полем □ комплексных чисел изоморфна алгебре всех матриц некоторого порядка над полем □ . О Молине: [21, вып. 4 и 17; 120, т. 2, с.588; 51, с.348].

В работе 1898 г. Э. Картан распространил результаты Молина и свои собственные на алгебры над □ . Он доказал, что всякая действительная простая некоммутативная алгебра изоморфна одной из алгебр матриц n-го порядка, элементами которых являются либо действительные числа, либо комплексные, либо кватернионы.

О некоммутативных алгебрах: [51, гл. 10; 8, с. 113–120; 140, с. 205–214]; указанная выше на с. 157 книга И. Л. Кантора и А. С. Солодовникова.

Кантор

Гениальный немецкий математик **Георг Кантор (1845–1918)** является создателем теории множеств. В отличие от многих великих математиков, проявивших себя в различных областях математики, Кантор занимался созданием и разработкой одной, совершенно новой математической дисциплины – теории множеств. Наш очерк о нем кратко отражает основные этапы его жизни и периоды творчества. При этом главными источнивами для нас являются книги [143, 144].

1. Детство и годы учебы Кантора.

Георг Кантор родился в России, в Санкт-Петербурге. Там же, в немецкой колонии, он жил до 11-летнего возраста. В 1850 г. в Санкт-Петербурге жило более 40 тысяч немцев. Отец Георга, Георг-Вальдемар Кантор (ок. 1813–1863) родился в Копенгагене, был датским подданным. Судя по сохранившимся его письмам, он получил хорошее гуманитарное образование. Он переехал в Петербург вероятно еще в ранней молодости. Там он был посредником при заключении торговых и биржевых сделок, а потом имел собстсвенную фирму посреднических услуг. Дела его шли



Герман Гюнтер Грассман



Эрнст Эдуард Куммер



Генрих Эдуард Гейне



Леопольд Кронекер



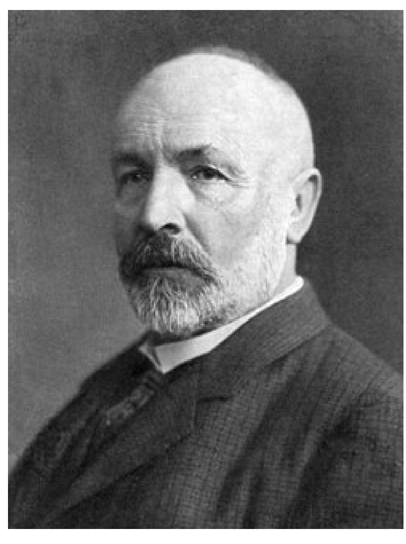
Бернхард Риман



Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс



Феликс Клейн



Георг Кантор



Рихард Дедекинд



Давид Гильберт



Фердинанд Георг Фробениус



Фридрих Людвиг Готлоб Фреге



Иммануэль Лазарус Фукс



Жозеф Лиувилль



Шарль Эрмит



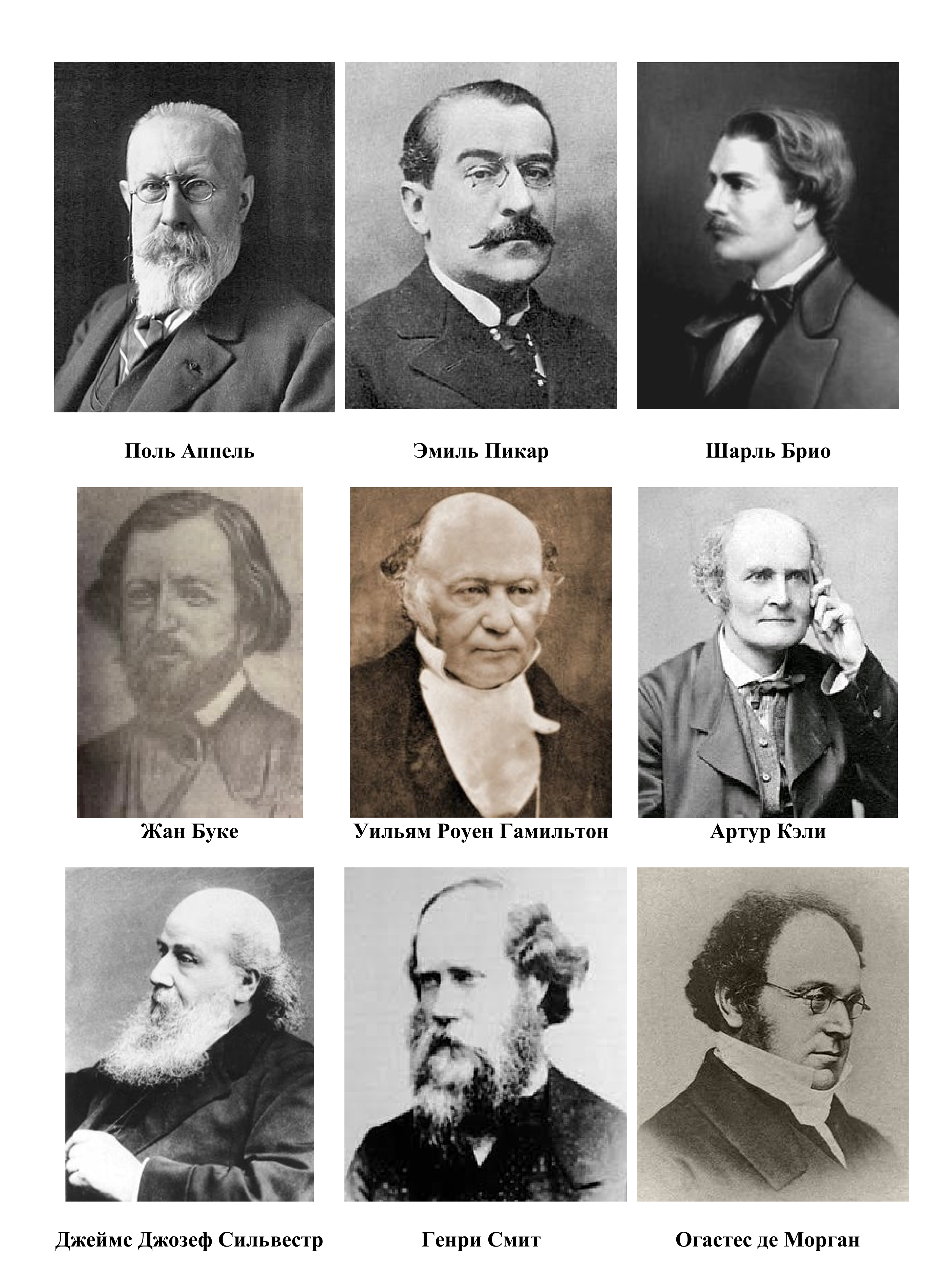
Камилл Мари Эдмон Жордан



Жан Гастон Дарбу



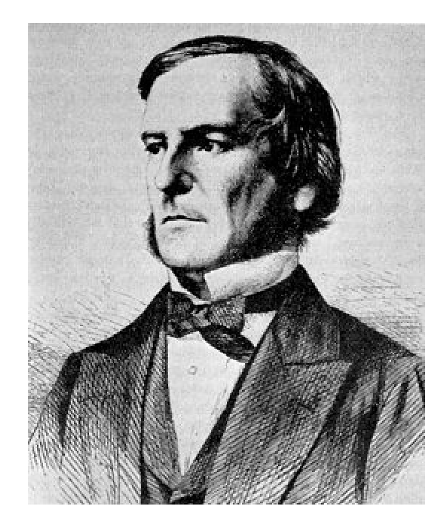
Анри Жюль Пуанкаре



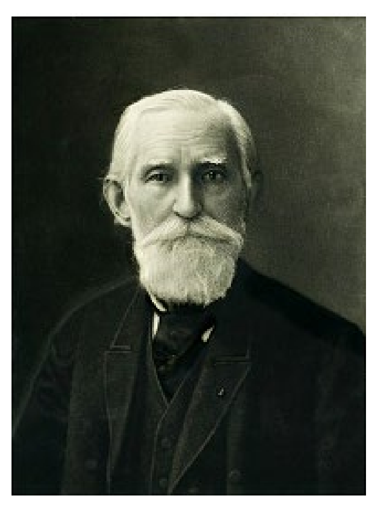
Поль Аппель | Эмиль Пикар | Шарль Брио

Жан Буке | Уильям Роуен Гамильтон | Артур Кэли

Джеймс Джозеф Сильвестр | Генри Смит | Огастес де Морган



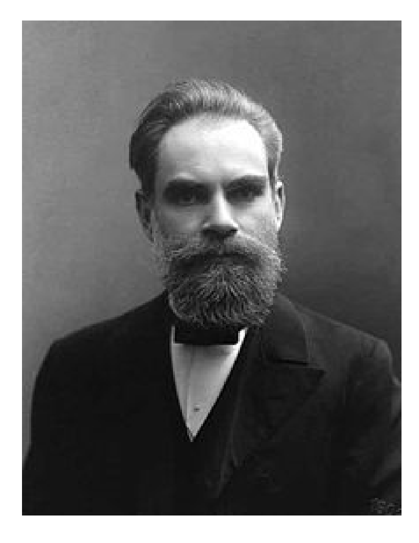
Джордж Буль



Пафнутий Львович Чебышев



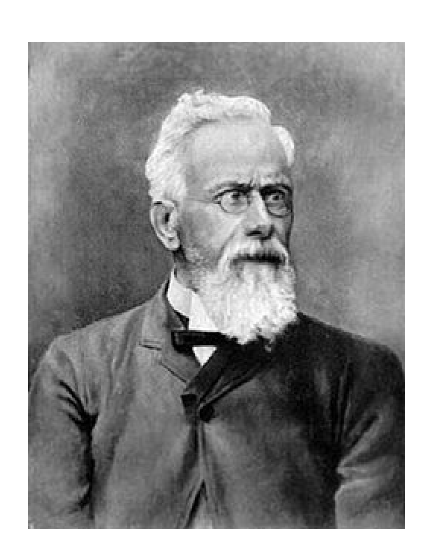
Софья Васильевна Ковалевская



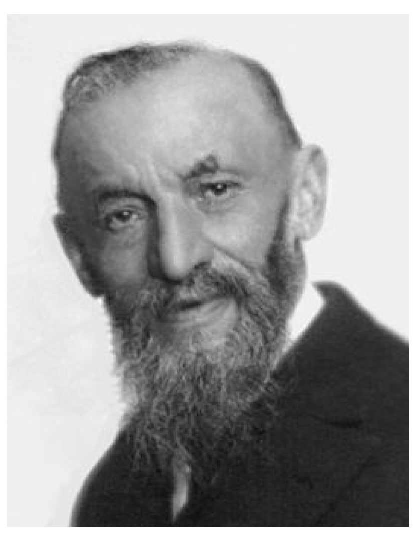
Александр Михайлович Ляпунов



Егор Иванович Золотарев



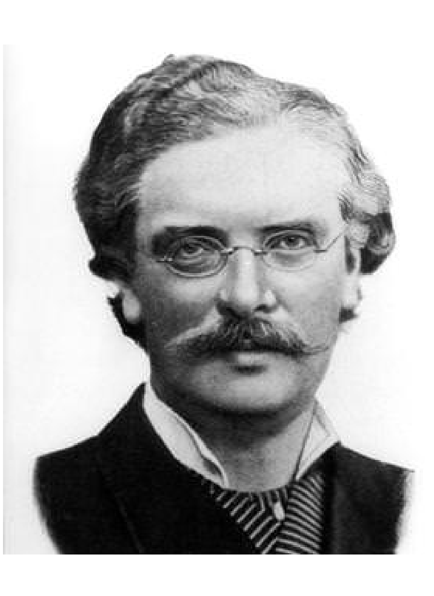
Энрико Бетти



Джузеппе Пеано



Софус Ли



Гёста Миттаг-Леффлер

успешно, и он оставил своим детям очень хорошее наследство – полмиллиона золотых марок. Его предки, судя по недавно составленной генеалогии, имели еврейское происхождение. Как видно, например, из [143, с. 9], этот факт еще недавно оспаривался. Георг-Вальдемар Кантор по вероисповеданию был евангелическим христианином (протестантом). В 1842 г. он обвенчался с Марией-Анной Бём, католичкой, в немецкой евангелической лютеранской церкви в Санкт-Петербурге. Мария-Анна Бём (1819–1896) происходила из очень известной семьи музыкантов, ее отец был капальмейстером Императорской оперы в Петербурге. Будущий математик Георг Кантор был старшим из шести детей в семье. В Петербурге он посещал начальную школу.

В 1856 г. в связи с болезнью отца семья Канторов переехала в Германию, где климат мягче, и поселилась во Франкфурте. Некоторое время Георг посещал частные школы во Франкфурте и гимназию в Висбадене. Он очень рано ощутил желание изучать математику, но отец хотел, чтобы сын стал инженером. В 1860 г. Георг окончил реальное училище в Дармштадте, а в 1862 г. там же – Высшую ремесленную школу. Учителя отмечали его исключительные способности к математике.

Осенью 1862 г. Георг Кантор поступил на философский факультет Политехнического университета в Цюрихе, но учился там лишь один семестр, так как смерть отца вынудила его вернуться к семье. Он не стал продолжать учебу в Цюрихском политехническом университете, где не было крупных математиков для возможности получить хорошее образование. Георг Кантор получил солидное наследство и перевелся в Берлинский университет. В то время в Берлинском университете обучалось около 2000 студентов, из них около 700 на философском факультете, куда входило и математическое отделение. Преподавали математики с мировым именем: Карл Вейерштрасс, Эрнст Куммер и Леопольд Кронекер. Кантор слушал лекции Кронекера, Куммера, Вейерштрасса и других математиков. Летний семестр 1866 г. Кантор провел в Гёттингенском университете, а затем вернулся в Берлинский.

В 1867 г. Кантор защитил в Берлинском университете докторскую диссертацию «О неопределенных уравнениях второй степени» и получил степень доктора философии. Здесь ему после изучения работы «Арифметические исследования» Гаусса и книги «Теория чисел» Лежандра удалось внести существенные улучшения в

теорию решения неопределенных уравнений $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, разработанную Гауссом. В этом же году он сдал устные экзамены: Куммер экзаменовал его по теории чисел, а Вейерштрасс – по алгебре и теории функций. В 1868 г. Кантор сдал государственные экзамены на право преподавания в гимназиях и прошел педагогическую практику. В Берлине Кантор принадлежал к небольшому кружку студентов-математиков, которые регулярно собирались в одном из винных погребков для дружеского и инллектуального общения. Тесная дружба связывала Кантора во время его пребывания в Берлине с учеником Вейерштрасса Г. А. Шварцем.

2. Возникновение и начало развития теории множеств у Кантора.

После окончания учебы Георг Кантор до 1913 г., т.е. более 40 лет, работал в университете г. Галле недалеко от Лейпцига. Это был небольшой провинциальный прусский университет. С 1844 г. там работал выдающийся немецкий математик Эдуард Генрих Гейне **(1821–1881)**, окончивший Берлинский университет. Когда Кантор закончил учебу, Гейне занимал в Галленском университете должность ординарного профессора. Основные труды Гейне относятся к математической физике, он занимался теорией потенциала и уравнениями в частных производных. Ему принадлежит ряд работ по теории специальных функций (сферические и цилиндрические функции, функции Ламе и др.). Он ввел термин «цилиндрическая функция». В математическом анализе он ввел (в работе 1870 г.) понятие равномерной непрерывности функции и доказал (в работе 1872 г.), что непрерывная на отрезке функция является равномерно непрерывной на нем [8, с. 144–145]. Эту теорему в современных учебниках обычно называют теоремой Кантора. Гейне принадлежит определение предела функции «на языке последовательностей». В 70-х гг. XIX в. Гейне доказал теорему о покрытии: из всякого покрытия отрезка $[a,b]$ системой интервалов можно выделить конечное покрытие этого отрезка. В 1898 г. эту теорему доказал и французский математик Э. Борель (1871–1956). В настоящее время ее обычно называют леммой Гейне–Бореля о покрытии.

В 1867–1869 гг. экстраординарным профессором Галленского университета был Г. А. Шварц. Уходя в Цюрихский политехнический университет на должность ординарного профессора, Шварц, по-видимому, рекомендовал Гейне пригласить на освободившееся место Кантора, с которым дружил в Берлине. Кантор получил приглашение Гейне и весной 1869 г. защитил в Галленском университете еще одну

диссертацию («хабилитационную») на право чтения лекций в университете и стал здесь приват-доцентом. Она тоже посвящена теории чисел, а именно задаче определения всех линейных преобразований, при которых тернарная квадратичная форма (т. е. от трех переменных) переходит в себя.

В 1869 г. вышла работа Кантора «О простых числовых системах», в которой он решил вопрос о единственности представления натурального числа n в виде

$$n = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + ...$$

для заданной системы $\{a_0, a_1, ...\}$ возрастающих натуральных чисел.

Гейне скоро убедился, что Кантор обладает исключительными математическими способностями. В кругу своей семьи Гейне говорил: «Когда-нибудь этот Кантор совершит что-то великое, потому что в нем необычное остроумие сочетается с совершенно незаурядной фантазией» [143, с. 20]. Сам Гейне занимался в то время, в частности, вопросом о единственности разложения функций в ряд Фурье и равномерной сходимостью этого ряда. Он побудил Кантора заняться проблемой единтвенности разложения функций в ряд Фурье, и это привело Кантора к началу разработки теории множеств.

Вообще изучение тригонометрических рядов

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

сыграло очень большую роль в развитии математики. Ими занимались очень многие выдающиеся математики, начиная с середины XVIII в. Дирихле в работе о рядах Фурье 1937 г. дал определение функции как однозначного отображения точек промежутка оси абсцисс в ось ординат. Поскольку коэффициенты a_n, b_n ряда Фурье выражаются через интегралы, то Риман в своей второй диссертации 1853 г., посвященной рядам Фурье, дал определение интеграла без требования о непрерывности функции, что позволило интегрировать разрывные функции и разлагать их в ряд Фурье. Изучение точек разрыва функций, представимых рядом Фурье, способствовало возникновению теории множеств.

Кантор приступил к проблеме единственности разложения функций в ряд Фурье в работе «Доказательство того, что функция, заданная для каждого действительного значения x тригонометрическим рядом, представима лишь одним

способом в этой форме», опубликованной в журнале Крелле в 1870 г. Он доказывает здесь теорему единственности в виде: если

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos nx + d_n \sin nx) = 0 \qquad (*)$$

для всех действительных значений x, то $c_n = 0$ и $d_n = 0$ для любых $n = 0,1,2,\dots$. Через год в кратком дополнении к этой статье он показывает, что заключение теоремы единственности остается в силе и тогда, когда существует конечное множество исключительных точек x_i, т. е. таких, в которых ряд в (*), либо расходится, либо имеет сумму, отличную от нуля. (В работах по тригонометрическим рядом Кантор использует термин «совокупность» вместо «множество».)

Главной работой Кантора по рядам Фурье является работа «О распространении на новый случай одной теоремы из теории тригонометрических рядов», опубликованной в 1872 г. в журнале *Mathematische Annalen*. В ней он доказывает теорему единственности для рядов Фурье при наличии некоторых исключительных бесконечных множеств точек. Здесь он развил одно из очень важных понятий топологии точечных множеств – понятие производного множества данной совокупности точек. Исходным здесь является понятие предельной точки множества, т. е. точки, в любой окрестности которой имеется хотя бы одна точка данного множества. Для данного множества P совокупность всех его предельных точек Кантор называет «первым производным множеством» и обозначает через P'. Посредством соотноения $P^{(n)} = (P^{(n-1)})'$ он вводит производное множество $P^{(n)}$ порядка n для множества P. Теорема Кантора о единственности разложения функции в ряд Фурье утверждает, что она остается в силе и в том случае, когда исключительное бесконечное множество точек является производным множеством $P^{(n)}$ произвольного порядка n. Выше в очерке о Римане отмечалось, что в работе 1875 г. производные множества изучал английский математик Генри Смит (1828–1883) в связи с вопросом об интегрируемости разрывных функций. Он доказал, что производные множества нигде не плотны в содержащих их промежутках.

Работа Кантора 1872 г. о рядах Фурье определила его дальнейшие научные интересы – исследования бесконечных множеств различного вида и построение их теорем.

В этой же работе для большей строгости изложения Кантор на четырех журнальных страницах строит свою **теорию действительных чисел** в виде фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Его предшественником в аналогичном способе построения действительных чисел были чешский математик **Бернард Больцано (1781–1848)** и французский математик **Шарль де Мерэ (1835–1911)**. Теории действительных чисел у Больцано и Мерэ были недостаточно разработаны. Рукопись Больцано, написанная в 30-х гг. XIX в. была опубликована только в 1897 г., а Мерэ опубликовал теорию действительных чисел в работе 1869 г., но ее тогда почти никто из математиков не заметил. В то время получила известность теория действительных чисел Вейерштрасса, которую он излагал в своих лекциях, начиная с 1860 г.

Понятие фундаментальной последовательности действительных чисел появилось в получившей известность работе Больцано 1817 г. и в курсе «Алгебраический анализ» Коши в 1821 г. В настоящее время такие последовательности часто называют последовательностями Коши.

Кантор считает известными понятия и свойства рациональных чисел. Вопрос заключается в пополнении их иррациональными числами. Для этого он использует фундаментальные последовательности $\{r_n\}$ рациональных чисел. Такая последовательность называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N такое, что для любого натурального числа $n > N$ и любого натурального m выполняется неравенство $|r_{n+m} - r_n| < \varepsilon$. (До построения теории действительных чисел число ε здесь считается рациональным.) Последовательность $\{r_n\}$ рациональных чисел называется нуль-последовательностью, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное N такое, что для любого натурального $n > N$ выполняется неравенство $|r_n| < \varepsilon$. Две последовательности $\{r_n\}$ и $\{r'_n\}$ называются эквивалентными, если последовательность $\{r_n - r'_n\}$ является нуль-последовательностью. Все множество фундаментальных последовательностей $\{r_n\}$ распадается на классы эквивалентных последовательностей. Действительное число по Кантору – это класс эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Во множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел вводятся отношения порядка и арифметические операции, доказываются свойства этих операций. Теперь

можно ввести понятие предела числовой последовательности и ее сходимости. Проверяется, что если к фундаментальным последовательностям $\{a_n\}$ действительных чисел применить тот способ, которым были получены действительные числа, то получается то же множество $\mathbb{R}$ действительных чисел. Это свойство полноты множества $\mathbb{R}$ действительных чисел. В $\mathbb{R}$ любая фундаментальная последовательность сходится, а во множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел – не всегда. В XX в. эта ситуация была перенесена на метрические пространства. Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится к некоторому его элементу. Взаимно однозначное соответствие действительных чисел и точек прямой Кантор вводит в качестве аксиомы. Подробнее с теорией действительных чисел на основе фундаментальных последовательностей можно познакомиться по учебнику:

Немыцкий В. В., Слудская М. И., Черкасов А. Н. Курс математического анализа. – М. – Л.: Гостехиздат, 1940. – Т. 1. – 460 с.; 1957. – 3-е изд.

Теории действительных чисел Вейерштрасса и Кантора носят теоретико-функциональный характер и близки между собой. Вейерштрасс определял действительные числа с помощью частичных сумм рядов с рациональными членами, в частности десятичных дробей, а сходимость ряда связана по критерию Коши с фундаментальностью его частичных сумм. В том же 1872 г., что и Кантор, Э. Коссак опубликовал теорию действительных чисел по лекциям Вейерштрасса, а Ш. Мерэ вторично изложил свою теорию.

Тогда же, в 1872 г. в работе «Непрерывность и ираациональные числа» опубликовал свою теорию действительных чисел выдающийся немецкий математик **Рихард Дедекинд (1831–1916)**, один из главных основоположников современной алгебры. Его теория действительных чисел носит теоретико-множественный характер. Он определяет действительные чисела как сечения множества рациональных чисел, т. е. как разбиения множества всех рациональных чисел на два непустые непересекающиеся класса A и B, где всякое число из класса A меньше чисел из класса B. Есть три возможности: 1) в классе A имеется наибольшее рациональное число r, а в классе B нет наименьшего; 2) в классе B имеется наименьшее рациональное число r, а в классе A нет наибольшего; 3) в классе A нет наибольшего рационального числа, а в классе B – наименьшего. Говорят, что в

случаях 1) и 2) сечение определяет рациональное число r (пограничное между классами A и B), а в случае 3) – иррациональное число. Далее вводятся отношение порядка и операции над действительными числами, доказываются свойства этих операций. В [243] в очерке о древнегреческом математике Евдоксе мы приводили построенный им в IV в. до н. э. аналог теории действительных чисел и отмечали, что теория действительных чисел Дедекинда сходна с теорией Евдокса. Теория действительных чисел Дедекинда излагается, например, в многочисленных изданиях «Курса дифференциального и интегрального исчисления» Г. М, Фихтенгольца в первом томе. Теория действительных чисел Кантора по сравнению с теорией Дедекинда более удобна для обобщений. О достижениях Дедекинда в алгебре мы писали выше на страницах 141–148.

Большое значение для Кантора в его дальнейших занятиях теорией множеств имело его личное знакомство с Дедекиндом, которого он случайно встретил во время поездки в Швейцарию в 1872 г. Между ними возникла многолетняя переписка, из которой видно, когда Кантор получил свои первые очень важные результаты по теории множеств. Дедекинд тоже внес свой вклад в создание теории множеств. В частности, он дал определение бесконечного множества как такого, которое эквивалентно некоторой своей правильной части. (т. е. не совпадающей с самим множеством).

В 1869 г. в Галленском университете освободилось место экстраординарного профессора. На эту должность претендовали два приват-доцента: К. Томе (ученик Римана) и Г. Кантор. Только в 1872 г. министерство просвещения и культуры учредило здесь дополнительную должность экстраординарного профессора. Томе, начавшему работать в университете раньше Кантора, дали эту должность с жалованьем в 1500 марок в год, а Кантору – без жалованья. Кантор в 1873 г. заявил министерству, что по окончании семестра снимает с себя эту должность, и ему было назначено жалованье в 1200 марок в год.

В 1874 г. Г. Кантор женился на Валли Гутман. Она происходила из семьи коммерсанотов, в 10 лет стала круглой сиротой и воспитывалась в семье своего старшего брата. Их брак основывался на глубокой взаимной привязанности. У них было шестеро детей, одна из дочерей стала известной певицей.

В 1873 г. Кантор заинтересовался вопросом о возможности или невозможности установления взаимно однозначного соответствия между точками различных бесконечных множеств.

Древние греки избегали в математике рассуждений, приводящим к парадоксам, поэтому не признавали актуально бесконечных множеств, т. е. взятых сразу, целиком, в завершенном виде. Но они признавали потенциально бесконечные множества, т. е. такие, которые можно построить шаг за шагом (например, множество натуральных чисел можно построить прибавлением единицы). В средние века появляется интерес к бесконечным множествам. Так, английский математик Т. Брадвардин в XIV в. в своем «Трактате о континууме» приводил в качестве парадоксов примеры взаимно однозначного соответствия между точками линий различной длины (между полуокружностью и ее диаметром, между гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника и др.).

В 1638 г. Галилей указал на взаимно однозначное соответствие множества натуральных чисел и их квадратов.

Непосредственным предшественником Кантора в вопросах, касающихся изучения бесконечных множеств, является Б. Больцано, книгу которого «Парадоксы бесконечного» (1851) Кантор знал и высоко ценил. Мы писали об этой книге в [289] в очерке о Больцано. Здесь Больцано критически рассматривает приведенные математиками и философами различные определения бесконечности, анализирует и объясняет парадоксы, связанные с бесконечностью. Он указывает на взаимно однозначное соответствие между любыми отрезками числовой оси, рассматриваемыми как точечные множества (вместо термина «множество» Больцано использует термин «многообразие»). Больцано не оценил значение взаимно однозначного соответствия между множествами как признака «численности» их элементов. Но он, наверное, считал, что не все бесконечные множества эквивалентны между собой, так как ставит вопрос об «исчислении бесконечностей», т. е. о трансфинитных числах. Следует отметить, что, в отличие от Больцано, не только Аристотель, но даже Гаусс, считали, что актуальной бесконечности, как завершенной, не должно быть места в математике.

Кантор называет множество M счетным, если существует взаимно однозначное соответствие между ним и множеством $\mathbb{N}$ натураьных чисел $1, 2, ..., n, ...$.

Иными словами, все элементы счетного множества можно занумеровать, представив их в виде последовательности $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Кантор легко установил, что множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел является счетным, а также что множество наборов $(n_1, n_2, ..., n_{n_k}, ...)$ натуральных чисел счетно. Отсюда было очевидно, что счетным является множество всех алгебраических чисел, т. е. множество корней всех многочленов $f(x)$ (всех алгебраических уравнений $f(x)=0$) с целыми коэффициентами. В письме от 29 ноября 1873 г. Дедекинду Кантор ставит вопрос: верно ли, что множество $\mathbb{R}$ действительных чисел является счетным? (Вместо $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ Кантор использует обозначения (n) и (x).) Дедекинд не смог ответить на поставленный Кантором вопрос и добавил, что этот вопрос не представляет особого интереса с практической точки зрения. В ответном письме Кантор, возражая Дедекинду, пишет, что если бы множество действительных чисел оказалось несчетным, то из этого следовало бы новое доказательство теоремы Лиувилля о существовании трансцендентных чисел, т. е. чисел, не являющихся алгебраическими [143, с. 29].

А уже в письме от 7 декабря 1873 г. Кантор сообщает Дедекинду свое доказательство несчетности интервала $(0,1)$ действительных чисел. Кантор доказал этот результат методом от противного с использованием метода вложенных отрезков. Оно приводится и в современных учебниках. Так впервые было показано, что существует неэквивалентные множества, т. е. такие, что не существует взаимно однозначного соответствия между их элементами.

В конце декабря 1873 г. Кантору представилась возможность изложить в Берлине результат Вейерштрассу, и тот предложил Кантору опубликовать этот результат. В 1874 г. вышла работа Кантора «Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел», в журнале Крелле, издаваемом уже Лиувиллем. Здесь Кантор сначала доказывает счетность множества алгебраических чисел, а затем несчетность множества чисел интервала $(0,1)$. Этот интервал состоит из множества A алгебраических чисел и множества T трансцендентных (т. е. неалгебраических) чисел. Следовательно, множество T несчетно. Заметим, что французский математик **Жозеф Лиувилль (1809–1882)** в 1851 г. построил некоторые классы трансцендентных чисел. Трансцендентность чисела e доказал в 1873 г.

французский математик Ш. Эрмит (1822–1901), а трансцендентность чисела π и логарифмов алгебраических чисел – Ф. Линдеман в 1882 г.

Открытие Кантором знаменательного факта о существовании неэквивалентных множеств не было в те годы оценено математиками. Но оно было очень важным шагом на пути возникновения теории множеств.

3. Период наибольшей активности Кантора в разработке теории множеств (1877–1884).

После доказательства Кантором в 1873 г. несчетности множества действительных чисел у него возник вопрос, существует ли взаимно однозначное соответствие, например, между точками квадрата и точками отрезка, равного его стороне. В январе 1874 г. он ставит этот вопрос в письме к Дедекинду, и полагает, что *нет*, а доказательство этого факта считает почти излишним.

Проходит более трех лет, и 20 июня 1877 г. Кантор в письме к Дедекинду приводит свое первое доказательство поразительного факта: между точками единичного квадрата $(0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1)$ и точками единичного отрезка $0 \le t \le 1$ можно установить взаимно однозначное соответствие. Это доказательство основано на использовании десятичных дробей. Точке (x, y) единичного квадрата, где $x = 0, a_1 a_2 a_3 ....$, $y = 0, b_1 b_2 b_3 ...$, Кантор ставит в соответствие точку $t = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 ...$ единичного отрезка $[0,1]$ и обратно, точке $t = (0, t_1 t_2 t_3 t_4 ...)$ отрезка $[0,1]$ ставит точку $(x, y) = (0, t_1 t_3 ...; 0, t_2 t_4 ...)$ квадрата. Дедекинд указывает Кантору на недостаток этого способа доказательства: если учесть, что некоторые десятичные дроби допускают неоднозначную запись (либо с нулем, либо с девяткой в периоде), то происходит нарушение взаимной однозначности между некоторыми точками отрезка и квадрата. А если брать открытый квадрат, то некоторые точки интервала $(0,1)$, например, $t = 0,200...$, не имеет образа в этом квадрате.

Через несколько дней Кантор послал Дедекинду иное доказательство эквивалентности множества точек единичного квадрата и единичного отрезка – с использованием цепных дробей вместо десятичных. По поводу доказанного им факта этой эквивалентности он пишет: «Я это вижу, но я в это не верю». 2 июля 1877 г. Дедекинд подтвердил правильность этого доказательства Кантора.

В июле 1877 г. Кантор отослал в журнал Крелле статью «К учению о многообразиях», она была опубликована с большой задержкой в 1878 г., так как встретила сопротивление Л. Кронекера, имевшего большое влияние в редакции журнала. Статья Кантора противоречила критическим взглядам Кронекера на то, что должно изучаться в математике. Об этих его взглядах мы будем говорить в следующем пункте очерка.

В этой статье Кантор вслед за Больцано и Риманом вместо нынешнего термина «множество» использует термин «многообразие». Здесь Кантор называет множества M_1 и M_2 имеющими равную мощность или эквивалентными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. Это обозначают в виде $M_1 \sim M_2$. Термин «мощность» (*Mächtigkeit*) Кантор взял у Штейнера. Для бесконечных множеств это понятие является обобщением числа элементов конечных множеств. В настоящее время для мощности множества A обычно используют обозначение $card\ A$, а мощность называют также кардинальным числом. Мощность счетного множества Кантор позже обозначил через $\aleph_0$ (читается «алеф-нуль», здесь $\aleph$ – первая буква древнееврейского алфавита).

В этой статье Кантор доказывает тот парадоксальный факт, что все континуумы (в том числе $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$, $n > 1$) независимо от их размерности имеют одну и ту же мощность. Ее называют мощностью континуума и обозначают обычно буквой c (от лат. *continuum*). Позже Кантор обозначил ее через $\aleph_1$. Математики с изумлением восприняли неожиданный результат Кантора.

В этой работе Кантор впервые упоминает о континуум-гипотезе: не существует множеств, имеющих мощность, промежуточную между мощностью счетных множеств и мощностью континуума. Он предполагает в дальнейшем доказать это, не представляя себе, что в XIX в. до введения аксиоматики теории множеств решить вопрос о континуум-гипотезе было невозможно. В дальнейшем он потратил много безнадежных усилий на ее доказательство.

В этой статье Кантор говорит о классе всех счетных множеств и классе всех множеств, эквивалентных отрезку $[0,1]$, как о мощностях. В дальнейшем под мощностью множества A Кантор понимает то общее, что есть у всех множеств, эквивалентных множеству A, если отвлечься от устройства и порядка элементов

множества. Такое определение мощности множества Кантор приводит в 1895 г., но без слов об эквивалентности, а без них оно неясно [143, с. 83].

Дедекинд высказал Кантору вероятную причину равномощности континуумов разных размерностей: взаимно однозначное соответствие между ними является всюду разрывным. В 1879 г. Кантор опубликовал свое доказательство этого утверждения Дедекинда, но оно содержало пробелы, а строгое доказательство дал в 1911 г. нидерландский математик Л. Э. Я. Брауэр (1881–1966).

В 1879 г. 34-летний Кантор стал ординарным профессором Галленского университета. Незадолго до того он хотел перейти в Берлинский университет, где в 1876 г. стали вакантными две должности экстраординарного профессора. Конкурсная комиссия хотела взять его туда, но совет философского факультета Галленского университета высказался против перевода Кантора в Берлинский университет. В дальнейшем Кантор из-за нападок Кронекера на теорию множеств решил оставаться в Галле.

Вершиной творческих успехов Кантора в разработке теории множеств является его знаменитая большая работа в шести частях «О бесконечных линейных точечных многообразиях», опубликованная в 1878–1884 гг. в журнале *Mathematische Annalen*. Она содержит основы теории множеств и некоторые важные понятия топологии. Это не систематическое изложение теории, а цикл отдельных статей, позволяющих проследить рождение новой науки – теории множеств, совершившей переворот в математике. Пятую часть этого труда Кантор опубликовал в 1883 г. и отдельным изданием под названием «Основы общего учения о многообразиях».

За недостатком места мы можем указать только самые главные результаты этой большой работы Кантора. Они касаются не только точечных множеств в $\mathbb{R}$, но и в $\mathbb{R}^n$ (Кантор вместо $\mathbb{R}^n$ пишет G_n), а некоторые формулируются и для множеств вообще. Уже в 1878 г. Кантору было известно, что множество всех подмножеств данного множества имеет мощность, которая больше мощности самого множества. Поэтому Кантор считает своей главной задачей дать классификацию бесконечных множеств, хотя бы в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$. Прототипом для этого послужила его классификация производных множеств. С них он начинает свою большую работу. Если для точечного множества P существует такое натуральное n, что $P^{(n)}$ – пустое множество, то множество P он называет множеством первого рода, в противном случае множество P называется

множеством второго рода. Он вводит понятие множества, плотного в некотором интервале, и доказывает, что точечное множество первого рода не может быть плотным ни в каком интервале. О другом способе классификации множеств речь будет идти в пятой части этой большой работы Кантора.

Во второй части работы Кантор определяет понятия общей теории множеств – равенство множеств, подмножество, объединение и пересечение множеств. Тогда еще не было современной символики для включения, объединения и пересечения множеств. Кантор пользуется своей, не получившей распространения.

В третьей части работы Кантор устанавливает результат, связанный с сепарабельностью пространства $\mathbb{R}^n$, т. е. с существованием счетного, плотного в $\mathbb{R}^n$ множества.

В четвертой части работы Кантор получает ряд теорем теоретико-множественной топологии. Подмножество P пространства $\mathbb{R}^n$ Кантор называет изолированным, если $P \cap P' = \varnothing$, и доказывает, что каждое изолированное множество является счетным. Если производное мноество P' счетно, то счетно и P. Там же Кантор доказал, что если для точечного множества $P \subset (a,b)$ производное множество P' счетно, то P имеет жоранову меру, равную нулю.

Наиболее интересной и новаторской является пятая часть труда Кантора, опубликованная в 1883 г. и вышедшая в том же году отдельным изданием под названием «Основы общего учения о многообразиях». Цель этой публикации – дать математический аппарат, описывающий актуальную бесконечность с помощью построения трансфинитных (сверхконечных) чисел.

Кантор получает трансфинитные числа с помощью трех «принципов порождения». Один из них – «прибавление единицы». Так получаются одно за другим натуральные числа. Они служат мощностями для соответствующих эквивалентных между собой конечных множеств. Натураьные чисела Кантор называет числами первого класса. Последовательность натуральных чисел возрастает и не имеет последнего элемента. Ее можно мыслить как некоторое актуальное множество. Кантор пишет: «… нет ничего нелепого в том, чтобы вообразить себе некоторое новое число – назовем его ω» [144, с. 121]. Он сравнивает эту ситуацию с введением нового числа $\sqrt{2}$ (иррационального) с помощью его рациональных десятичных

приближений по недостатку. Число ω называется первым трансфинитным числом. Оно получается по второму принципу – аналогу предельного перехода.

Непосредственно следующие за ω трансфинитные числа снова получаются по принципу прибавления единицы: $\omega+1, \omega+2, ..., \omega+n, ...$. Это приводит к трансфинитному числу $\omega+\omega=\omega\cdot 2$ в результате аналога предельного перехода. Продолжая процесс, получаем числа $\omega\cdot k$ и далее приходим по второму принципу к числу ω^2. Далее процесс продолжается аналогично. Кантор отмечает, что трансфинитные числа, полученные с помощью указанных двух принципов, являются мощностями счетных множеств. Он называет эти числа трансфинитными числами второго класса, в отличие от натуральных чисел, составляющих первый класс. Третий принцип Кантора – принцип задержки, согласно которому переходить с несчетным множеством можно только после того, как исчерпаны все числа второго класса. Для несчетных множеств тоже можно установить шкалу мощностей в виде дальнейших трансфинитных чисел. В пятой части работы Кантор приводит элементы арифметики трансфинитных чисел второго класса.

В пятой части этой работы Кантор ввел понятие вполне упорядоченного множества и начал изучать такие множества. Он высказал здесь очень важную в этом вопросе теорему о том, что всякое множество можно сделать вполне упорядоченным. В дальнейшем многие годы он безуспешно пытался ее доказать. Здесь он также говорит о континуум-проблеме, над решением которой постоянно думал. Это привело Кантора к уточнению понятия континуума, которое до него не имело четкого определения. Для этого он сначала вводит понятие совершенного множества: множество P называется совершенным, если $P=P'$, где P' – множество его предельных точек. Кантор называет континуумом любое совершенное связное множество. В современной топологии континуумом называется любой связный компакт. Определение Кантора ближе к современному, чем давались до него, но не вполне совпадает с современным. К тому же у Кантора связность носит метрический характер. В примечании Кантор приводит свой пример совершенного множества, нигде не плотного на отрезке $[0,1]$. Оно получается из отрезка $[0,1]$, если его разделить на три равные части, выбросить среднюю часть без ее концов (т. е. интервал), затем сделать то же самое с каждым из оставшихся двух отрезков и далее повторять до бесконечности этот процесс выбрасывания с каждым из остающихся

отрезков. Как это ни кажется парадоксальным, но мощность этого канторова совершенного множества равна мощности континуума, несмотря на то, что общая сумма длин выброшенных интерваов равна единице, а именно:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+...=1\,.$$

Дело в том, что здесь в процессе выбрасывания интервалов остаются невыброшенными, кроме концов отрезков (их счетное множество), также точки, которые можно записать в виде троичных дробей $0,a_1a_2,...$, где каждое из a_k равно либо 0 либо 2. А множество таких дробей, как показал Кантор, имеет мощность континуума. О Канторовом совершенном множестве см., например, в учебном пособии И. П. Натансона «Теория функций вещественной переменной» (М.: Гостехиздат, 1957. – С. 56–57). Выше на с. 29–30 мы отмечали, что до Кантора подобные примеры строил английский математик Г. Смит в связи с теорией интегрирования, когда Кантор еще не ввел понятия мощности множества.

В шестой части работы Кантор, в частности, формулирует и доказывает (хотя и не все) семь теорем помеченных буквами от A до G и касающихся точечных множеств, например:

A. Совершенное множество несчетно;

C. Если производное множество P' счетно, то существует число α первого или второго класса такое, что $P^{(\alpha)}=\varnothing$;

E. Если P' несчетно, то оно представимо в виде объединения совершенного и счетного множеств. (Теорема Кантора–Бендиксона.) Здесь Кантор также предпринимает попытку построения теории меры для точечных множеств. В конце он еще раз формулирует континуум-гипотезу и обещает дать в ближайших публикациях ее доказательство.

Когда Кантор писал и публиковал эту работу в шести частях, ему еще не было и сорока лет. Подавляющее число его современников-математиков невысоко оценило эту работу. Позже, в 1925 г. Гильберт охарактеризовал ее как «удивительнейший расцвет математического духа и вообще одно из высочайших творений чисто умозрительной человеческой деятельности» [143, с. 45].

В 1881 г. умер Эдуард Гейне, и с этих пор охладились отношения между Кантором и Дедекиндом, их переписка возобновилась только в конце 90-х гг. XIX в.

Кантор приложил многоусилий, чтобы склонить Дедекинда занять место Гейне в Галленском университете. Но Дедекинд, ссылаясь на разные обстоятельства, решил остаться в своем родном городе Брауншвейг, где он с 1862 г. был профессором Высшей технической школы.

Большое значение для Кантора имела начавшаяся в то время дружба со шведским математиком **Гёстой Миттаг-Леффлером (1846–1927)**, между ними завязалась переписка. Как указывалось выше, он, как и Кантор, был учеником Вейерштрасса. Миттаг-Леффлер в 1877–1880 гг. – профессор Гельсингфорского, с 1881 г. – Стокгольмского университета. Основные его работы относятся к теории функций комплексного переменного. Женившись на дочери миллионера, он имел средства, которые позволили ему основать в 1882 г. журнал *Acta Mathematica*, который вскоре стал одним из лучших в Европе и существует и в настоящее время. Миттаг-Леффлер изъявил желание опубликовать некоторые работы Кантора в своем журнале. Организованная Миттаг-Леффлером группа молодых французских математиков, куда вошел и А. Пуанкаре, перевела на французский язык почти полностью работы Кантора по теории множеств, вышедшие к тому времени, и они были опубликованы в 1883–1885 гг. в журнале *Acta Mathematica.* Это способствовало ознакомлению французских математиков с теорией множеств Кантора. Период наивысшей активности Кантора в разработке теории множеств закончился в 1884 г. в связи с его нервной болезнью.

4. Перерыв в публикациях Кантора по теории множеств в связи с болезнью (1884–1894).

Нервная болезнь Кантора проявилась внезапно летом 1884 г., врачи характеризуют ее как маниакально-депрессивный психоз [143, с. 49–52]. В медицинско литературе говорится, что эта болезнь не обязательно вызывается внешними факторами, хотя они способствуют возникновению болезни. В маниакальной фазе больной возбужден более, чем обычно, говорлив, непоседлив. Чувствует как бы прилив жизненных сил, но не может сосредоточиться на умственных занятиях, нарушен сон. В депрессивной фазе – недовольство жизнью, апатия, раздражительность, отсутствие интереса к умственным занятиям. После окончания этой фазы и до следующего приступа человек совершенно здоров, хотя его

интересы могут несколько измениться. Первый приступ болезни Кантора продолжался в течение лета и осени 1884 г. В дальнейшем они повторялись неоднократно, Кантор лечился амбулаторно в университетской клинике и в санаториях.

Считают, что главным фактором, способствовавшим болезни Кантора, являются нападки на его теорию множеств со стороны Кронекера, который выступал за то, чтобы в математике оставить только те разделы, где все доказательства проведены конструктивно в виде определенных алгоритмов действий. Образцом математической дисциплины Кронекер считал арифметику. Он решительно выступал против чистых теорем существования, в частности, против доказательств от противного. Он выступал против доказательства Вейерштрасса о существовании точных граней у ограниченной числовой функции. Он не признавал рассуждений Кантора, связанных с иерархией актуально бесконечных множеств и введением трансфинитных чисел. Гильберт позже называл Кронекера «запрещающим диктатором» в математике и говорил, что никто не может изгнать нас из рая, созданного Кантором. И хотя Кронекер не выступал в печати против теории множеств Кантора, но в кругу своих коллег и даже на лекциях перед студентами критиковал ее. Об этом было известно Кантору. В начале болезни в 1884 г. Кантор написал Кронекеру примирительное письмо, и тот ответил ему в тактичной форме. Кронекер был одним из главных представителей направления в обосновании математики, которое в начале XX в. получило неудачное название «интуиционизм». Оно вылилось потом в дисциплину «конструктивная математика».

Математик А. Шёнфлис в статье «Кризис в математическом творчестве Кантора» (1927) приводит, кроме указанной выше, и другую причину, способствовавшую нервной болезни Кантора: «К этому наверняка в не меньшей степени причастна борьба [Кантора] с проблемой континуума, которую он вел в течение всей своей жизни и на которую он израсходовал свои лучшие силы». Впрочем, авторы книги [143], из которой мы взяли эту цитату, считают эту вторую причину несущественной для возникновения болезни Кантора [143, с. 50–51]. Во время болезни 1884 г. ему даже показалось, что он доказал континуум-гипотезу, но через день обнаружил, что его доказательство ошибочно, и впал в депрессию, о чем сообщил Миттаг-Леффлеру.

Осенью 1884 г. у Кантора была готова новая статья, в которой он изложил свою теорию порядковых типов. Часть работы он послал в журнал Миттаг-Леффлера и она уже была набрана к печати. Но внезапно Кантор получил от Миттаг-Леффлера письмо, в котором тот попросил Кантора отозвать работу. Эта работа, кроме математического, носила и фолософское содержание. Миттаг-Леффлер написал, что работа Кантора, носящая весьма абстрактный характер, может отпугнуть читателей новой терминологией и отсутствием каких-либо приложений. Это может подорвать авторитет Кантора. Он советует Кантору временно отложить публикацию, пока тот не найдет каких-либо приложений, например, к доказательству континуум-гипотезы с помощью теории порядковых типов Кантора. Миттаг-Леффлер вспоминает о Гауссе, который не публиковал своих исслеований по неевклидовой геометрии, боясь, что его не поймут, и это нарушит его авторитет. Кантор без возражений забрал в 1885 г. рукопись обратно, но для него это было большим ударом. Впоследствии он писал, что это отбило у него охоту печататься в математических журналах. И действительно, в течение следующих десяти лет он опубликовал только одну маленькую статью в 1892 г., о которой речь будет позже. А материал работы, не принятой к печати, он включил в свою очень важную работу, по теории множеств, опубликованную в 1895–1897 гг.

Неопубликованная работа Кантора была обнаружена и опубликована только в 1970 г. В пятой части предыдущей большой работы Кантор строил трансфинитные числа, исходя из множества натуральных чисел, используя принципы порождения. В неопубликованной работе он рассматривает упорядоченные и вполне упорядоченные множества и вводит для них, не используя принципов порождения, трансфинитные числа, называя их порядковыми типами.

Кантор называет два упорядоченных множества подобными, если они могут быть отображены друг на друга взаимно однозначно с сохранением порядка их элементов. Под порядковым типом Кантор имеет в виду «… то общее понятие, под которое подпадают все упорядоченные множества, подобные данному упорядоченному множеству, и только они, а следовательно, и само данное упорядоченное множество» [143, с. 78]. При обычном способе упорядочения чисел Кантор вводит порядковый тип ω для множества натуральных чисел, η – для множества рациональных чисел, θ – для интервала $(0,1)$. Он доказывает, что каждое

линейно упорядоченное плотное счетное множество без граничных точек имеет порядковый тип η. Потом Кантор вводит для каждого порядкового типа α противоположный порядковый тип $*\alpha$ обращением способа упорядочения.

Кантор вводит понятие вполне упорядоченного множества как такого, что каждое его непустое подмножество (в частности оно само) имеет первый элемент, а для любого его элемента (если только он не последний) существует следующий за ним элемент множества. Например, множество чисел $x_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, вполне упорядочено, а множество всех рациональных чисел интервала $(0,1)$ только упорядочено. Порядковые типы вполне упорядоченных множеств называются порядковыми числами. Для конечных множеств они являются натуральными числами, а для бесконечных – трансфинитными числами. Вводятся операции сложения и умножения порядковых чисел и доказываются свойства этих операций. В этой работе Кантор одновременно с немецким логиком **Готлобом Фреге (1848–1925)** дал теоретико-множественное обоснование понятия натурального числа. О Фреге см. далее на с. 248–252.

За исключением не очень длинных перерывов в связи с болезнью, Кантор продолжал читать лекции в университете до 1911 г. Начиная с 1869 г. он прочел лекции по очень широкому кругу дисциплин и разделов математики. Кроме лекций по основным предметам, он читал лекции по теории чисел, квадратичным формам, теории алгебраических чисел, дифференциальной геометрии, абелевым интегралам, эллиптическим функциям, тригонометрическим рядам, теории вероятностей, аналитической механике, гидродинамике, теории потенциала, вариационному исчислению, методике преподавания математики и др. Его лекции были сложными для начинающих, что видно из слов ректора университета. Кантор только раз (в 1885 г.) читал курс лекций, связанный с теорией множеств: «Теория чисел как введение в теорию порядковых типов». Но проблемы теории множеств Кантор обсуждал на математическом семинаре.

Из-за того, что Кантор разрабатывал свои идеи по теории множеств сам, а также в силу провинциальности Галленского университета, только один из его учеников, **Феликс Бернштейн (1878–1956)**, получил широкую известность, занимаясь теорией множеств и теорией функций. В 1898 г. было опубликовано его

доказательство очень важной теоремы, которую Кантор, несмотря на попытки не смог доказать: если из двух множеств каждое эквивалентно какой-нибудь части другого, то эти два множества эквивалентны между собой. Ее обычно называют теоремой Кантора–Бернштейна. В том же году доказательство этой теоремы опубликовал и Э. Шрёдер, но оно содержало существенный пробел. А первым доказал эту теорему Р. Дедекинд в заметке 1887 г., которая была опубликована только после его смерти [144, с. 171; 143, с. 60].

Уже до начала болезни Кантор понял, что его желание перейти на работу в Берлинский или Гёттингенский университет неосуществимо. В 1886 г. по заказу Кантора для его семьи был построен в Галле большой двухэтажный дом, сохранившийся до настоящего времени. Для финансирования строительства Кантор использовал часть наследства своего отца. Просторная комната полуподвального этажа служила Кантору его рабочим кабинетом и большой библиотекой. Кантор был исключительно начитан, был прекрасным собесеником, занимался живописью. Дом Канторов славился гостеприимностью, там часто собирались коллеги Кантора по работе и его друзья. Беседы сопровождались музицированием, в котором существенную роль играла Валли – жена Кантора.

После неудачи с публикацией указанной выше работы, Кантор надолго отходит от занятий математикой. Он пишет небольшие заметки, в частности в защиту актуальной бесконечности и трансфинитных числел в «Журнал философии и философской критики». Так, в 1886 г. он пишет там, что причина возражений против существования актуально бесконечных чисел заключается главным образом в том, что этим числам «приписываются, а точнее – навязываются все свойства конечных чисел» в то время как актуально бесконечные числа представляют собой новый род чисел. Интересно, что в одном из писем 1893 г. Кантор очень темпераментно выступает против попыток некоторых своих современников ввести актуально бесконечно малые числа. Это не потенциально бесконечно малые в математическом анализе, имеющие пределом нуль, а актуально бесконечно малые числа в смысле разработанного в середине XX в. неархимедова анализа. Впрочем, в одном из более поздних писем Кантора, обнаруженном лишь недавно, он отказывается от этой своей критики [143, с. 67–68].

Ряд математиков XIX в. в той или иной мере по своим философским взглядам были близки к платонизму (Б. Больцано, Ш. Эрмит, а в какой-то мере и Г. Кантор). Согласно Платону (ок. 427–347), первому из представителей объективного идеализма, существует две формы реального бытия: внешний мир как мир вещей, изменчивый и во многом непостижимый, и мир идей (понятий, точных истин) – вечный и неизменный. У Платона вещи выступают подобием и отражением идей. Прототипом для мира идей Платону послужила геометрия Евклида. Кантор во многом отходит от платонизма к материализму. Так, он пишет в 1896 г. одному священнику: «… числам может быть приписана реальность постольку, поскольку их следует считать выражением или отражением процессов и соотношений, имеющих место во внешнем мире…» [143, с. 62]. Кроме того, Кантор приписывает понятиям качества «плодотворность или неплодотворность», что не имеет места в платоновском мире идей.

На бременском собрании Общества немецких естествоиспытателей и врачей в 1890 г. благодаря усилиям и решающему влиянию Кантора был создан Союз немецких математиков, независимых от Общества. Кантор был избран председателем этого Союза и оставался им еще два года. На собрании Союза немецких математиков, состоявщемся в Галле в 1891 г. Кантор сделал доклад «Об одном элементарном вопросе учения о многообразиях», в котором изложил свой знаменитый «диагональный» метод в теории множеств.

С 1886 г. до 1895 г. Кантор опбликовал только одну свою математическую статью – маленькую, но очень важную. Она вышла в «Ежегоднике союза немецких математиков» в 1892 г. Здесь он с помощью своего диагонального метода доказал неравенство $2^{\mu} > \mu$. Здесь μ – мощность непустого множества M, а 2^{μ} – мощность множества всех подмножеств множества M. Иным способом он получил этот результат уже в 1878 г.

Поясним происхождение приведенного выше обозначения 2^{μ}. Для конечного множества, состоящего из n элементов, его мощность равна n. Для такого множества число всех его подмножеств, состоящих из k элементов, равно C_n^k. (Здесь $C_n^0 = 1$ отвечает пустому множеству $\varnothing$, а $C_n^n = 1$ – самому множеству.) А число всех подмножеств множества из n элементов равна $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$. По формуле бинома эта сумма

равна $(1+1)^n = 2^n$. Это и есть мощность множества всех подмножеств конечного множества, состоящего из n элементов. По аналогии для любого множества мощности μ мощность множества всех его подмножеств обозначается через 2^μ. Множество всех подмножеств множества A обозначают через 2^A или через $\mathcal{P}(A)$.

Кантор доказал также, что множество всех подмножеств множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел имеет мощность континуума, т. е. $2^{\aleph_0} = c$, где $\aleph_0 = \mathrm{card}\,\mathbb{N}$, $c = \mathrm{card}\,[0,1]$. Доказанная Кантором уже в 1873 г. теорема о том, что $c > \aleph_0$, может быть записана в виде $2^{\aleph_0} > \aleph_0$, представляющем частный случай неравенства $2^\mu > \mu$ для множеств вообще.

5. Последний крупный успех Кантора в теории множеств в 1895–1897 гг. Признание теории множеств и ее становление как самостоятельной науки.

После почти десятилетнего перерыва Кантор начал публиковать в журнале *Mathematische Annalen* в 1895 г. свою большую работу «К обоснованию учения о трансфинитных множествах» объемом в 70 страниц. Вторая ее половина вышла в 1897 г. Эта знаменитая работа представляет собой завершение творческого пути Кантора в разработке теории множеств. Здесь он уже вместо термина «многообразие» пользуется термином «множество» и дает его определение: «Под «множеством» подразумевается каждое объединение M определенных, четко различаемых нашим взглядом или нашим мышлением объектов m (называемых «элементами» множества M) в одно целое» [143, с. 83]. В этой работе нет никаких философских рассуждений, изложение носит общий абстрактный характер без каких-либо приложений или частных примеров множеств.

В первой половине работы Кантор строит теорию кардинальных чисел (мощностей). Такое число дает количественную характеристику «численности» элементов множества независимо от порядка расположения элементов. Кардинальные числа он здесь обозначает по-разному, в частности через алефы $\aleph_k$. Кардинальные числа бесконечных множеств называются трансфинитными числами. Кантор говорит, что не может в общем виде решить вопрос о сравнении между собой каждых двух кардинальных чисел и надеется сделать это в будущем. Он приводит без

доказательства теорму об эквивалентности множеств (теорему Кантора–Бернштейна), которую Ф. Бернштейн доазал немного позже.

Кантор вводит для кардинальных чисел операции сложения, умножения и возведения в степень и доказывает свойства операций. Пусть A и B – непересекающиеся множества, $\alpha = \text{card}A$, $\beta = \text{card}B$. Суммой $\alpha + \beta$ кардинальных чисел Кантор называет кардинальное число объединения множеств A и B. Под произведением $\alpha\beta$ кардинальных чисел Кантор понимает мощность декартова произведения множеств A и B, т. е. множества $A \times B$ всех упорядоченных пар (a,b) элементов $a \in A$, $b \in B$. Степень α^{β} Кантор определяет как мощность множества всех отображений из множества A во множество B.

Вторая половина работы Кантора посвящена упорядоченным множеством (о них говорится немного) и вполне упорядоченным множествам. Она является переработкой статьи, рукопись которой Кантор вынужден был забрать из печати в 1885 г. О ее содержании мы писали выше в пункте 4. Теперь же Кантор ведет рассуждения для упорядоченных и вполне упорядоченных множеств общего вида, введя для них без каких-либо принципов порождения порядковые характеристики: порядковые типы. Для вполне упорядоченных множеств их порядковые типы Кантор называет порядковыми числами, это натуральные числа для конечных множеств и трансфинитные числа для бесконечных. Как и в отозванной работе, он вводит для порядковых чисел операции сложения и умножения и доказывает свойства этих операций. Отношение сравнения порядковых чисел он постулирует без доказательства. Подробнее об упорядоченных и вполне упорядоченных и трансфинитных числах см. в книге П. С. Александрова «Введение в общую теорию множеств и функций» (М., Л.: Гостехиздат, 1948. – Гл. 3).

Ф. А. Медведев пишет: «Устойчивый интерес Кантора именно к трансфинитным числам отчасти объясняется тем, что с их помощью он надеялся решить проблему континуума и вообще разобраться в проблеме сравнения мощностей. Если говорить об исторической перспективе, то Кантор в этом отношении […] ошибался. Более важным для математики в целом оказались именно сами множества и взаимоотношения между ними…» [144, с. 172].

После опубликования этой работы Кантор до конца жизни в течение двадцати ое не написал ни одной математической работы. Уже в 1896 г. у него появился

интерес к проблеме авторства трагедий Шекспира. В то время в немецкой литературе была очень популярной теория о том, что автором трагедий Шекспира является английский ученый и политический деятель Фрэнсис Бэкон (1561–1626). Вместо Бэкона предполагались также и другие авторы трагедий Шекспира. Кантор в 1886–1900 гг. опубликовал несколько заметок, в которых утвердает, что автором этих трагедий был Бэкон, или же что и Шекспир, и Бэкон были лишь подставными лицами, чтобы скрыть имя неизвестного автора.

Кантор был верующим, вел переписку и дружил с видными католическими богословами. Он старался примирить религию с наукой, что было нетипично для математиков XIX в. В письме к Эрмиту в 1894 г. он заявляет: «… я обращаюсь к кругу образованных мирян…, чтобы отвести их от распространяющихся заблуждений скептицизма, атеизма, материализма, позитивизма, пантеизма и т. п. и снова приводить их постепенно к *теизму*, который один сообразен разуму» [143, с. 69]. «Кантор остался до своей кончины верующим евангелической церкви и был похоронен евангелическим священником» [143, с. 71]. Но он не был согласен с буквальным пониманием Нового Завета. Отклоняя догмат о непорочном зачатии, Кантор в своей брошюре, изданной в 1905 г., на основании изучения древних источников, возникших в одно время с евангелиями, пытается установить, кто был родным отцом Иисуса Христа.

В 80–90-х гг.XIX в. теория множеств получает развитие и у других математиков. Важный вклад внес итальянский математик **Джузеппе Пеано (1858–1992)** своими работами 1887–1888 гг. Он заключает плоские множества между вписанными и описанными многоугольниками и вводит для плоских областей понятие меры, которое получило название «меры Жордана», хотя Жордан ввел эту меру лет на пять позже Пеано. В работе 1888 г. Пеано ввел знаки $\cup$ и $\cap$ для объединения и пересечения множеств. Имя Пеано носит система аксиом арифметики, которую он привел в 1892 г. Но первым сформулировал систему аксиом арифметики Р. Дедекинд в своей небольшой книге «Что такое числа и для чего они служат» (1888). Эта книга представляет важный вклад в теорию множеств. Здесь дается теоретико-множественное обоснование системы натуральных чисел. При этом Дедекинд ввел для подмножеств множества понятие цепочки, получившее в дальнейшем важные применения [143, с. 81–82].

В 90-х гг. XIX в. теория множеств Кантора получила широкое признание у математиков. Молодое поколение математиков (Гурвиц, Адамар, Минковский, Гильберт) использует ее в своих работах. Кантор был одним из инициаторов проведения Международных математических конгрессов. Первый такой конгресс состоялся в 1897 г. в Цюрихе, на нем присутствовал и Кантор. Там много говорилось о теории множеств Кантора. Немецкий математик А. Гурвиц сделал сжатый обзор теории порядковых чисел Кантора и ее приложений к классификации точечных множеств.

Теорию множеств Кантора до ее аксиоматизации иногда называют «наивной». Во время начавшегося ее триумфального шествия стали известными имеющиеся в ней парадоксы (антиномии). Первый такой парадокс опубликовад в 1897 г. итальянский математик Ч. Бурали-Форти, ученик Пеано. Сущность этого парадокса в том, что множество всех порядковых чисел является противоречивым. Действительно, пусть M – множество, состоящее из всех порядковых чисел α как его элементов. Тогда оно должно содержать и свое порядковое число $\bar{\alpha}$, а это противоречит определению порядкового числа. Для Кантора этот факт не был неожиданным. Уже в 1895 г. он писал Гильберту, что такие множества, как множество всех множеств (или всех кардинальных чисел, или всех порядковых чисел) противоречивы. В частности. множество всех множеств должно было бы иметь наибольшую мощность, но множество всех подмножеств этого множества имеет еще большую мощность. Кантор назвал такие «сверхмножества» абсолютными (или неконсистентными) и говорил, что их нельзя рассматривать. Английский логик и математик **Бертран Рассел (1872–1970)** в 1908 г. опубликовал открытый им парадокс в теории множеств, мы его рассматриваем ниже на странице 252. Рассел является одним из основоположников направления в обосновании математики, которое было названо «логицизмом».

Авторитет Кантора несколько пошатнулся в связи с обнаружением парадоксов в теории множеств. Выдающийся французский математик Анри Пуанкаре вначале благосклонно относился к теории множеств Кантора и даже использовал ее. А ознакомившись с парадоксами в ней (до её аксиоматизации), он в 1908 г. назвал ее тяжелой болезнью в математике [179, с. 236]. Он писал: «Нет актуальной бесконечности. Канторианцы забыли это и впали в противоречие. […] И логистики

подобно канторианцам забыли об этом и встретились с теми же затруднениями» [295, с. 400]. Но значение теории множеств тогда стало уже настолько очевидным, что отдельные исключительные случаи не мешали широкому ее распространению и применениям. Немецкий математик А. Шёнфлис в 1899 г. написал в Энциклопедию математических наук главу о теории множеств, а в 1900 г. – обзор в 250 страниц о развитии теории точечных множеств. В это время работы французских математиков Э. Бореля, Р. Бэра и А. Лебега с использованием теории множеств превратили теорию функций действительного переменного в отдельную науку.

Д. Гильберт на втором Международном математическом конгрессе (1900 г.) в Париже в своем знаменитом докладе сформулировал 23 математические проблемы, которые считал важнейшими для будущего развития математики. Под первым номером этих проблем он указал поставленные Кантором проблему континуума (континуум-гипотезу) и проблему полного упорядочения множества. Ниже мы укажем, когда они были решены. А сейчас скажем несколько слов о Гильберте, о нем мы неоднократно упоминаем в нашей книге. Выдающийся немецкий математик **Давид Гильберт (1862–1943)** является математиком-универсалом, это один из самых знаменитых математиков конца XIX в. и первой половины XX века. Он родился в Велау (близ Кёнигсберга). Окончил Кёнигсбергский университет в 1884 г. С 1893 г. – профессор этого университета, в 1895–1943 гг. – профессор Гёттингенского университета. Член-корреспондент Берлинской АН с 1913 г. А. Н. Колмогоров указывает 8 периодов творчества Д. Гильберта: теория инвариантов (1885–1893); теория алгебраических чисел (1893–1898); основания геометрии (1898–1902); обоснование принципа Дирихле и примыкающих к нему проблем вариационного исчисления и теории дифференциальных уравнений (1900–1906); теория интегральных уравнений (1900–1910); решение так называемой проблемы Варинга в теории чисел (1908–1909); вопросы математической физики (1910–1922); разработка логических основ математики (1922–1939). О нем см. книгу [167].

Д. Гильберт в своем фундаментальном труде «Основания геометрии» (1899) предложил аксиоматику евклидовой геометрии. В его системе аксиом основные понятия (точка, прямая, плоскость) не определяется, а устанавливаются взаимоотношения между ними. Он был главным представителем направления в обосновании математики, которое было названо «формализмом». Оно было

направлено против требований интуиционистов, возглавляемых Брауэром и Вейлем, очистить математику, выбросив из нее ряд разделов, которые не были строго обоснованы, в частности теорию множеств. Свою программу обоснования математики Гильберт изложил в написанном совместно с И. П. Бернайсом фундаментальной книге «Основания математики» (1934–1939). Основой обоснования математики у Гильберта является аксиоматический метод, в котором основные понятия не определяются. Были сформулированы четкие правила вывода, уточнено понятие доказательства. По Гильберту, проблема существования математических объектов и теорий сводится к проблеме их непротиворечивости. Но в 1931 г. австрийский математик **Курт Гёдель (1906–1978)** своими двумя теоремами (о неполноте и о непротиворечивости) доказал, что полностью обосновать математическую теорию ее средствами невозможно.

Под влиянием аксиоматизации Гильбертом евклидовой геометрии немецкий математик **Эрнест Цермело (1871–1953)** впервые дал (в 1908 г.) аксиоматику теории множеств, состоящую из семи аксиом [143, с. 98–99]. Третья из них (аксиома выделения) в дальнейшем оказалась лишней. Позже израильский математик **Адольф Френкель (1891–1965)** дополнил систему аксиом Цермело аксиомой подстановки. Эту систему аксиом без шестой аксиомы (аксиомы выбора) называют системой Цермело–Френкеля и обозначают ZF. Аксиому выбора обозначают буквой C. При включение этой аксиомы систему аксиом теории множеств обозначают ZFC. В последнее время добавлялись и другие аксиомы. Система аксиом Цермело-Френкеля и аксиома выбора приведены, например, в учебнике В. А. Зорича «Математический анализ» (М.: Физматлит, 1981. Ч. 1. – С. 38–40).

Эрнест Цермело родился в Берлине, в 1894 г. окончил Берлинский университет. Работал в университетах Гёттингена, Цюриха и Фрейбурга, с 1906 г. – профессор. Занимался, в основном, теорией множеств. Уже в 1904 г. он сформулировал аксиому выбора, которая носит его имя: для всякой системы непустых множеств M_α существует множество M, имеющее с каждым из множеств M_α только по одному элементу. Иными словами, из каждой системы непустых множеств M_α можно выбрать по одному элементу. Пользуясь этой аксиомой и понятием цепочки Дедекинда, Цермело в 1904 г. доказал теорему, которую не смог доказать Кантор:

всякое множество можно сделать вполне упорядоченным. Она называется теоремой Цермело.

До Цермело аксиомой выбора пользовались, не выделяя ее как аксиому. Возьмем, например, утверждение: если x_0 – предельная точка множества X, то существует последовательность $\{x_n\}$ точек множества X, сходящаяся к x_0. Для его доказательства берут систему окрестностей $u_n(x_0)$, стягивающуюся к точке x_0, и в каждой из них берут по точке $x_n \in X$. Аксиома выбора кажется очень простой и естественной. Но в первые десятилетия XX в. к ней было привлечено внимание многих математиков, так как иногда ее применение приводит к удивительным парадоксам. Одним из них является парадокс Банаха–Тарского, состоящий в том, что обычный трехмерный шар можно разбить (неконструктивно) на конечное число частей, из которых без наложения и пустот можно составить два шара того же радиуса. Частный случай этого парадокса был известен уже в 1914 г. См. книгу В. Босса «Лекции по метаматике. Т. 12: Контрпримеры и параоксы» (М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – Гл. 2).

В 1938 г. К. Гёдель для системы аксиом, близкой к системе ZF, доказал, что если она непротиворечива, то к ней без противоречия можно присоединить и континуум–гипотезу. Полное решение проблемы континуума, дал в 1963 г. американский математик **Поль Коэн (род в 1934 г.)** для системы ZFC (система Цермело–Френкеля с аксиомой выбора). Он доказал, что к системе ZFC можно без противоречия присоединить континуум-гипотезу или ее отрицание. Ситуация здесь аналогична той, которая имеет место в геометрии, когда принимается аксиома параллельности Евклида (и получается евклидова геометрия) или принимается ее отрицание (и получается неевклидова геометрия). У Кантора не было и мысли о такой ситуации. За решение проблемы континуума Коэн был награжден в 1966 г. медалью Дж. Филдса, которая в математике считается равносильной нобелевской премии.

За первые 15 лет XX в., еще при жизни Кантора, теория множеств превратилась в отдельную математическую науку. Уже в 1906 г. в Англии вышла книга супругов Юнг «Теория точечных множеств», а в Германии – книга Г. Гессенберга «Основные понятия теории множеств». В 1914 г. была опубликована основополагающая книга **Феликса Хаусдорфа (1868–1942)** «Начала теории множеств», которая стала первым систематическим учебником по теории множеств. В немецком журнале «Ежегодник

прогресса математических наук» с 1916 г. был отведен специальный раздел для теории множеств наравне с основными математическими дисциплинами.

Кантор закончил читать лекции в январе 1911 г., затем получил отпуск по болезни, а в 1913 г. вышел на пенсию. В связи с его 70-летием, которое должно было отмечаться в 1915 г., намечалось широкое международное чествование Кантора. Но оно было отмечено очень скромно, так как во время Первой мировой войны немецкие математики были в изоляции от французских и английских. Кантор умер 6 января 1918 г. от сердечного приступа.

С ростом популярности теории множеств Г. Кантор был удостоен ряда почестей. В 1901 г. он был избран почетным членом Лондонского королевского общества, в 1902 г. – почетным доктором университета в г. Осло. В 1904 г. он получил медаль имени Сильвестра – высшую награду Королевского общества Великобритании за достижения в области математики. В 1912 г. стал почетным доктором шотландского университета имени Святого Андрея. В 1913 г. награжден немецким Королевским орденом короны. Но в Берлинскую АН он не был избран из-за долголетней неприязни между ним и руководством Академии. Именем Кантора назван кратер на обратной стороне Луны.

О Канторе: [143; 144; 269; 197, т. 2, с. 714–718; 267; 292; 268; 290, с. 290–191; 8; 179; 146; 147; 149; 148; 13; 14–17].

Ляпунов

Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918), один из знаменитейших математиков и механиков, с 1885 г. в течение 17 лет работал на кафедре теоретической механики в Харьковском университете. Его исследования по механике и в теории вероятностей в то время занимали ведущее положение в мировой науке. Он родился в Ярославле в семье известного астронома М. В. Ляпунова, в то время – директора Демидовского лицея, а до того работавшего в Казанском университете. В 1863 г. М. В. Ляпунов по болезни вышел в отставку, поселился в деревне и занялся воспитанием трех своих сыновей. Из них Александр стал выдающимся математиком, Сергей – композитором, а Борис – филологом, будущим действительным членом АН

СССР. Начальное образование А. М. Ляпунов получил у отца, а после его смерти в 1868 г. – в семье у дяди, брата выдающегося физиолога И. М. Сеченова. Окончил с золотой медалью гимназию в Нижнем Новгороде, в 1876 г. поступил в Петербургский университет и в 1880 г. блестяще окончил математическое отделение со степенью кандидата и золотой медалью за работу «О равновесии твердых тел в тяжелых жидкостях», выполненную под руководством известного механика Д. К. Бобылева. Был оставлен на кафедре механики для подготовки к профессорскому званию, в частности под руководством выдающегося математика Пафнутия Львовича Чебышева (1821–1894). В январе 1885 г. защитил магистерскую диссертацию «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости» по предложенной Чебышевым теме. Этот вопрос восходит к Ньютону, до Ляпунова им занимались многие выдающиеся математики. Ляпунов уже в этой работе продвинулся несколько дальше, ее краткое изложение (а затем и полное) было опубликовано за рубежом и сделало имя Ляпунова известным в математических кругах Европы. В 1885 г. Ляпунов стал приват-доцентом Петербургского университета и в том же году был переведен на кафедру механики Харьковского университета, ставшую вакантной после отъезда В. Г. Имшенецкого в Петербург и ухода в отставку Д. М. Деларю.

Период жизни А. М. Ляпунова в Харькове (1885–1902) был чрезвычайно плодотворным. С первой же лекции Ляпунов, по словам своего ученика В. А. Стеклова, покорил своих слушателей. Он блестяще читал основной и специальные курсы механики, его литографированные лекции по механике содержали и новый научный материал. В 1886–1894 гг. Ляпунов, кроме чтения лекций в университете, читал курс механики и в технологическом институте. В 1888 г. публикует статью «О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости», в которой излагает свои строгие методы при исследовании устойчивости по первому приближению. В работе 1889 г. «Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах» он, в частности, исследует вопрос об устойчивости периодических движений. В 1892 г. он публикует в Харькове и защищает в Москве в качестве диссертации на степень доктора прикладной математики свою работу «Общая задача об устойчивости движения», которая принесла ему мировую славу, хотя и посмертно. В 1893 г. Ляпунова утверждают в звании ординарного профессора по кафедре механики Харьковского университета.

В своей докторской диссертации, которой предшествовали работы 1888 г. и 1889 г., и в дополняющих ее статьях 1892–1902 гг., также написанных во время работы в Харьковском университете, Ляпунов создал новую **математическую науку об устойчивости движения**, относящуюся к общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений, обязанную своим происхождением аналитической механике и имеющую многочисленные приложения. Он исследует на устойчивость системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, ..., x_n), k = 1, 2, ..., n,$$

где f_k при достаточно малых x_i разлагаются в сходящиеся ряды по целым положительным степеням x_i и обращаются в нуль, когда все x_i=0. Задача впервые была поставлена творцом аналитической механики Лагранжем. Исследовалась устойчивость движений, т. е. решений такой системы, по отношению к возмущению начальных условий движения. В частных случаях ее решали Лагранж, Дирихле и другие математики до Ляпунова. Томсон и др. при исследовании устойчивости заменяли исходную систему линейной, полученной отбрасыванием в f_k членов степени выше первой («устойчивость по первому приближению»). Однако, движение, устойчивое в первом приближении, может оказаться неустойчивым в действительности. Выдающийся французский математик А. Пуанкаре (1854–1912) строго решил вопрос об устойчивости в некоторых простых случаях. Ему и Ляпунову принадлежат первые разработки качественного направления в теории дифференциальных уравнений, цель которого – изучение траекторий по виду уравнений, без интегрирования.

Диссертация Ляпунова состоит из трех глав. Он сводит задачу об устойчивости к исследованию устойчивости нулевого решения $x_1 = ... = x_n = 0$ системы

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{k1}x_1 + ... + p_{kn}x_n + \sum P_k^{(m_1,...,m_n)} x_1^{m_1} ... x_n^{m_n},$$

где $m_i \geq 0$ целые, $i = 1, ..., n;$ $m_1 + ... + m_n \geq 2$, а коэффициенты зависят от t. Ляпунов вводит строгие определения устойчивости, асимптотической устойчивости, устойчивости по части переменных. Он вводит понятие характеристического числа функций и с его помощью в главе I решает вопрос о том, когда задача об

устойчивости решается по первому приближению.

Один из методов Ляпунова в теории устойчивости основан на представлении решений системы в виде рядов, члены которых содержат произведения степеней с произвольными постоянными основаниями и экспоненциальные множители. Широкое распространение и дальнейшие обобщения получил так называемый «второй метод» Ляпунова, основанный на введении функций $V(t, x_1, ..., x_n)$, связанных с дифференциальными уравнениями, – функций Ляпунова.

Вторая глава диссертации Ляпунова посвящена устойчивости установившихся движений, т. е. решений уравнений с независящими от t коэффициентами p_{ki} и $P_k^{(m_1,...,m_n)}$. Здесь много внимания уделено исследованию двух сомнительных с точки зрения первого приближения случаев. В третьей главе исследуются на устойчивость решения системы с периодическими по t коэффициентами p_{ki} и $P_k^{(m_1,...,m_n)}$ одного и того же периода w. Здесь также исследуются на устойчивость решения общей системы уравнений возмущенного движения. Этот замечательный труд Ляпунова издавался и позже: в 1907 г. – в Тулузе; в 1935, 1948 и 1950 г. – в СССР, в 1947 г. – в Принстоне (США).

Исследования Ляпунова по теории устойчивости получили широкое развитие в работах советских математиков А. А. Андронова, Н. Г. Четаева, И. Г. Малкина, К. П. Персидского, М. Г. Крейна и многих других. Актуальность работ Ляпунова и его последователей по теории устойчивости еще более возросла в наше время в связи с освоением космоса и развитием других областей науки и техники. Об этом свидетельствуют конференции и симпозиумы по проблемам устойчивости по Ляпунову. Подробнее о работах Ляпунова по механике в харьковский период его деятельности говорится в статье И. Г. Витензона в [173, с. 75–89].

Очень важный вклад внес А. М. Ляпунов в **теорию вероятностей** в двух работах, написанных и опубликованных в Харькове в 1900–1901 гг. в то время, когда он читал в университете курс теории вероятностей. В 1901 г. они были опубликованы и в *Comptes Rendus* – журнале Парижской академии наук (здесь публиковались многие его работы). В этих двух работах Ляпунов весьма существенно уточняет условия, при которых справедлива центральная предельная теорема теории вероятностей. Она говорит о том, что при некоторых условиях распределение

нормированных и центрированных сумм независимых случайных величин сходится к нормальному распределению. До Ляпунова ею занимались Муавр, Лаплас, Пуассон, а из русских математиков – П. Л. Чебышев и его ученик А. А. Марков (1856–1922). В формулировке Маркова этой теоремы требовалось выполнение некоторых условий для всех моментов $c_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x)$, где *F(x)* – функция распределения последовательности S_n сумм случайных величин. Ляпунов вместо счетного числа моментов ввел здесь характеристическую функцию $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} dF(x)$ и доказал теорему при существенно более слабых условиях, а кроме того, дал весьма точную оценку сходимости закона распределения сумм независимых случайных величин к нормальному. Эти результаты Ляпунова произвели большое впечатление на современников; тогда же, по-видимому, и появился термин «центральная предельная теорема» теории вероятностей. Метод характеристических функций оказался в дальнейшем мощным средством в теории вероятностей. Позже этой теоремой занимались многие математики (Линдеберг, Феллер; в 1927 г. – академик С. Н. Бернштейн, работавший в 1908–1933 г. в Харьковском университете, и др.).

Ляпунов внес важный вклад и в **теорию потенциала в математической физике** в своих 7 работах, опубликованных в 1886–1902 гг. Наиболее важная из них – работе «О некоторых вопросах, касающихся проблемы Дирихле» (1897). В настоящее время эти работы переведены с французского языка на русский и изданы отдельной книгой.

А. М. Ляпунов был деятельным членом Харьковского математического общества: с 1891 г. он состоял заместителем председателя, а в 1899–1902 гг. – председателем общества и редактором его «Сообщений». За 17-летний период в Харьковском университете он написал 28 научных работ, из них половина опубликована в Харькове. В 1902 г. он был утвержден в звании ординарного академика Петербургской академии наук по кафедре Чебышева, которая в течение восьми лет после смерти Чебышева оставалась вакантной. В 1902 г. Ляпунов переезжает в Петербург. Стеклов в своих воспоминаниях о Ляпунове пишет о харьковском периоде творчества Ляпунова: «Впоследствии он с особой любовью вспоминал этот период своей жизни (1885–1902) и в беседах со мной часто называл

его самым счастливым».

В Петербурге Ляпунов полностью отдается решению проблемы, с которой по совету Чебышева начинал в Петербурге свою раннюю научную деятельность. Речь идет о **фигурах равновесия** однородной равномерно вращающейся жидкой массы, требовалось установить, существуют ли фигуры равновесия, мало отличающиеся от эллипсоидов Маклорена и Якоби. Это задача из **небесной механики**, важная для теории происхождения и строения планет. Результаты своих исследований по этому вопросу Ляпунов опубликовал в 1906–1914 гг. на французском языке в огромном труде «О фигурах равновесия однородной вращающейся жидкости, мало отличающихся от эллипсоидальной», а также в двух дополняющих этот труд работах 1916 г. (общий объем около 1000 стр.). В. А. Стеклов пишет: «Эта проблема еще недавно казалась неразрешимой даже в случае однородной жидкости. Приближенное решение ее с помощью метода последовательных приближений было дано впервые Пуанкаре; Дж. Дарвин продвинул дальше вычисления до приближений второго порядка. Ляпунов решил задачу во всей общности в своем колоссальном труде… Он дал не только способ вычисления последовательных членов разложения…, но также доказательство сходимости последовательных приближений. Я пользуюсь случаем, чтобы отметить еще, что Ляпунов изучил проблему устойчивости фигур равновесия и дал строгое доказательство неустойчивости грушевидной фигуры». (Английский астроном Дж. Дарвин из своих вычислений ошибочно сделал заключение об устойчивости грушевидной фигуры.) О самоотверженном отношении Ляпунова к науке Стеклов писал: «Все из ряда вон выходящие силы свои он отдавал на беззаветное служение науке, ею он жил, в ней одной видел смысл жизни и часто говорил, что без научного творчества и самая жизнь для него ничего не стоит. С самого начала своей ученой деятельности он работал изо дня в день до 4 или 5 часов ночи, а иногда являлся на лекции (в Харьковском университете) не спав всю ночь. Он не позволял себе почти никаких развлечений и если появлялся иногда (раз или два в год) в театре или в концерте, то лишь в самых исключительных случаях, как, например, на редких концертах своего брата, известного композитора С. М. Ляпунова». Е. К. Ляпунова, жена второго брата, вспоминала: «Долго еще будут знать А. М. как математика и успешно развивать его идеи, но мало кто знает, что за внешне суровым обликом таился мягкий, добрый, преданнейший из людей… Он очень любил

детей; играя со своими племянниками, он увлекался игрой не меньше их, поднимая с ними весь дом вверх дном. Он любил музыку, унаследовав от своей матери врожденную музыкальность… А. М. был очень общителен в кругу близких, любил пошутить; … был очень гостеприимен, хлебосолен. Он очень любил природу».

Жизнь А. М. Ляпунова оборвалась трагически. В июне 1917 г. он увозит свою горячо любимую жену Наталию (племянницу выдающегося физиолога И. М. Сеченова), у которой обострился туберкулезный процесс, в Одессу к своему брату Б. М. Ляпунову, профессору-филологу Новороссийского университета. Будучи отрезан в разгар гражданской войны от Петербурга, А. М. Ляпунов в Одессе, без академического жалованья, оказался в тяжелом материальном положении, которое усугублялось уходом за тяжело больной женой. Осенью 1918 г. он начал читать спецкурс для профессоров и преподавателей университета о своих последних исследованиях. Перед смертью закончил работу «О некоторых рядах фигур равновесия неоднородной вращающейся жидкости» в 489 страниц на французском языке, она была опубликована в 1925–1927 гг. Истощенный морально и физически, он в день смерти жены 31.10.1918 г. выстрелил себе в голову и, не приходя в сознание, умер через три дня.

А. М. Ляпунов был академиком Петербургской АН, членом-корреспондентом Парижской АН, членом Национальной академии деи Линчеи в Риме. Академия наук СССР учредила золотую медаль его имени за выдающиеся работы в области математики и механики. Именем Ляпунова назван кратер краевой зоны Луны.

Этот очерк об А. М. Ляпунове взят нами из книги [288], с. 34–42

О Ляпунове: [120; 153; 154; 173; 294; 293, 2007 г., № 790; 288; 197, т. 3, с. 467–474; 14–17].

Пуанкаре

Одним из величайших математиков всех времен является французский математик, механик, физик, астроном и философ **Анри Жюль Пуанкаре (1854–1912)**, член более 30 Академий наук. Он прожил сравнительно короткую жизнь, но успел написать и издать более 500 статей и несколько книг. Наряду со своим младшим современником немецким математиком Давидом Гильбертом (1862–1943)

Пуанкаре считается последним математиком-универсалом из-за широкого охвата областей математики. Основным источником при написании пунктов 1 и 2 очерка является книга А. Н. Тяпкина и А. С. Шибанова «Пуанкаре» [151]. В пунктах 3–5, кроме этой книги, использован материал из ряда других источников, в том числе из Википедии. Книга [151] из серии «ЖЗЛ», за исключением Послесловия, посвященного вкладу Пуанкаре в специальную теорию относительности, носит литературно-биографический характер и посвящена широкому кругу читателей, не обязательно являющихся математиками.

1. Детство и годы учебы Пуанкаре.

Анри Пуанкаре родился в г. Нанси – административном центре французской провинции Лотарингия на северо-востоке Франции. Его отец Леон Пуанкаре (1828–1892) был профессором медицины в университете г. Нанси, а также занимался врачебной практикой. Он очень любил путешествовать, раз в год примерно на месяц уезжал в разные страны Европы, Азии или Африки. Эжени Лануа, мать Анри, очень заботилась о доме, семье, много внимания уделяла воспитанию детей. Ее родители были сельскими жителями. Семья Пуанкаре жила в большом трехэтажном доме, принадлежавшем отцу Леона Жаку-Никола, по профессии фармацевту, который на первом этаже дома содержал аптеку и фармацевтическую лабораторию, а сам со своими сестрами занимал третий этаж. Анри родился в этом доме. У него была сестра Алина, моложе его на два года. С ней он неразлучно проводил время в детские годы, а потом поддерживал отношения с ее семьей. В детстве Анри переболел дифтерией, которая осложнилась параличом ног и мягкого неба в течение девяти месяцев. В это время он не мог ходить и говорить. Это развило в нем способность самостоятельного размышления. Кроме того, у него появилась необычная способность – цветовое восприятие гласных звуков. Позже Пуанкаре отличался заметной рассеянностью, поскольку постоянно был глубоко занят своими мыслями. Он производил впечатление замкнутого человека, не вступая в пустые разговоры, держался скромно, сдержанно и застенчиво.

В семь лет Анри очень хорошо и много читал, умел писать и неплохо считал. Но родители не решались определить его в лицей, так как его организм еще не окреп после болезни. Живший поблизости преподаватель Альфонс Гинцелин взялся обучать

Анри различным предметам у себя на дому. Гинцелин был широко эрудированным человеком, занятия с Анри проводил по сократовскому методу в форме бесед, без каких-либо домашних заданий. Обучение далеко выходило за пределы школьной программы и имело главным образом естественно-научный характер. Занимались они и арифметикой, Гинцелин был автором учебника арифметики.

В восемь с половиной лет в 1862 г. Анри поступил в местный лицей в Нанси сразу на второй год обучения в девятый класс (младшим классом был десятый класс, а старшим – первый). В то время лицеи во Франции готовили учащихся к степени бакалавра. Получившие эту степень имели право поступать в высшие учебные заведения. Преподавание в лицеях носило классический характер: особое внимание уделялось изучению древних и родного языка, а также всеобщей истории. Преподаватели лицея вскоре обратили внимание на Анри Пуанкаре как на прилежного, любознательного ученика с широкой эрудицией. Он становится первым учеником в классе, его любимые предметы – история и география. Кроме того, преподаватели лицея отмечают у Анри несомненное литературное дарование. Он легко справляется также с математикой, но в младших классах лицея она еще не затронула его души.

Летние каникулы Анри обычно проводит со своей сестрой Алиной в деревне Арранси в поместье родителей матери. Мать и раньше, бывало, возила туда своих детей, но теперь добираться туда стало легче: раньше железная дорога от Нанси была до Меца, а теперь ее протянули дальше, дедушка со своей бричкой встречал внуков у вагона поезда. Анри и Алина увлекаются домашним театром: в деревне в лесу они со своими сверстниками ставят написанную Анри драму в стихах о Жанне д’Арк, а в Нанси тоже разыгрывают небольшие театральные представления.

Во время летних каникул 1867 г. семья Пуанкаре совершила поездку в Париж на Всемирную промышленную выставку. Грандиозные масштабы выставки произвели на Анри неизгладимое впечатление. Это была его первая поездка в Париж. В следующем году отец повез Анри в путешествие в Швейцарию, а затем в Англию – в Лондон. В том же году Анри и Алина впервые близко познакомились со своими младшими кузенами Раймоном и Люсьеном – детьми Антони, брата отца. Эти кузены стали в будущем знаменитыми. Раймон Пуанкаре стал председателем совета министров, а в 1913–1920 гг. – президентом Франции. Люсьен Пуанкаре,

впоследствии известный физик, стал генеральным инспектором народного просвещения Франции, а в 1917–1920 гг. – ректором Парижского университета.

На шестом году обучения в лицее у Анри Пуанкаре пробуждается повышенный интерес к математике. Однажды один из преподавателей лицея зашел в дом к родителям Анри и сказал им: «Ваш сын будет великим математиком». Но родители Анри никак не прореагировали на это предвидение. Общее обучение в лицее заканчивалось четвертым классом, после этого нужно было выбирать, где продолжать обучение: на отделении словесности или на естественнонаучном. Пуанкаре выбрал отделение словесности. Полагают, что таково было желание его родителей, хотя дядя Антони не раз советовал Анри поступать в Политехническую школу – самое престижное высшее учебное заведение Франции.

Год 1870-й, начиная с 19 июля, был тревожным для семьи Пуакаре, как и для многих французов, в связи с франко-прусской войной. Пруссия хотела поставить на свободный испанский престол своего принца, а Франция была против и объявила 19 июля войну Пруссии. Французы очень медленно проводили мобилизацию, а немцы быстро перебросили к французским провинциям Эльзасу и Лотарингии войска, в два раза превосходящие по количеству французские. Примерно в пяти сражениях немцы по частям победили французскую армию. Последнее крупное сражение произошло 1 сентября при Седане (на севере Лотарингии), где немцы окружили и принудили сдаться самую крупную армейскую группировку французов. Там же находился и император Наполеон III, он объявил о капитуляции Франции. Немцы беспрепятственно двинулись на Париж. 4 сентября в Париже произошло восстание, Наполеон III был свергнут и провозглашена Французская республика (третья по счету). Президент республики Адольф Тьер и правительство начали вести переговоры о мире с канцлером Пруссии Бисмарком, избравшим своей резиденцией королевский дворец в Версале под Парижем. Там же Бисмарк в январе 1871 г. объявил о создании объединенной Германской империи. Франция должна была выплатить Германии огромную контрибуцию, Германия присоединила к себе Эльзас с главным городом Страсбургом и северо-восточную часть Лотарингии – богатые промышленные районы Франции. Город Нанси, где жил Анри Пуанкаре, остался в составе Франции.

С начала войны Леон Пуанкаре вместе со своим 16-летним сыном Анри в качестве ассистента лечил раненых в местной больнице. Немцы оккупировали Нанси менее чем через месяц после начала войны. В лицее разместились немецкие кавалеристы, а занятия возобновились в октябре 1870 г. 1 декабря Эжени Пуанкаре со своими детьми Анри и Алиной совершила очень рискованную поездку по оккупированной немцами территории к своим родителям. Поезд дошел только до Меца, а дальше пришлось ехать дилижансом при морозе, усилившемся до двадцати градусов.

5 августа 1871 г. Анри Пуанкаре закончил сдавать экзамены на степень бакалавра словесности с оценкой «хорошо». Через несколько дней он выразил желание сдавать экзамены также и на степень бакалавра (естественных) наук. Поскольку Пуанкаре не посещал занятий на этом отделении, то ему дали время на подготовку к этим экзаменам до ноября. Он сдал их 7 ноября, но лишь с оценкой «удовлетворительно». Дело в том, что он провалил письменный экзамен, дав ответ на другой вопрос, то ли не зная ответа на предложенный вопрос, то ли перепутав по рассеянности. Формально Пуанкаре должен был бы выбыть из числа экзаменующихся. Экзамен на степень бакалавра проходил в местном университете, а экзаменаторы имели сведения о высоких математических способностях Анри. Поэтому, нарушив формальность, ему разрешили сдавать устный экзамен, и здесь он показал блестящие результаты. А общий ответ по этим двум экзаменам получил оценки «удовлетворительно». В дальнейшем экзаменаторы не пожалели о нарушении формальности.

Во Франции в лицеях, которые были на особо хорошем счету (сюда входил и лицей в Нанси), для желающих поступать в высшие учебные заведения были предусмотрены два дополнительных класса: элементарной математики и специальной математики. Поступать в обычный вуз можно было после класса элементарной математики, но для поступления в Политехническую школу и Высшую Нормальную школу требовалось окончить класс специальной математики. Получив диплом бакалавра наук, Пуанкаре поступает в класс элементарной математики. Летом 1872 г. он принимает участие в общенациональном конкурсе по математике для всех лицеев Франции и получает первую премию. Это был первый его крупный успех. Никто не мог ожидать, что лицеист из небольшого провинциального города, пережившего

оккупацию, может получить первую премию. Тогда же Анри, к удивлению для всех, сдает вступительные экзамены в Лесную школу города Нанси – единственное в этом роде высшее учебное заведение во всей Европе. Туда было очень много желающих поступить, даже иностранцев. По полученным им баллам Анри занял второе место, но поступать туда не стал. Полагают, что это была его проба сил для поступления в вуз. В октябре 1872 г. Пуанкаре постапает в лицей Нанси в класс специальной математики профессора Эллио. Этот профессор был изумлен математическими способностями и знаниями Пуанкаре. Будучи в Париже, Эллио сказал своему другу, профессору Политехнической школы, слова, которые впоследствии неоднократно цитировались: «В моем классе в Нанси есть математическое чудовище». Всех поражала способность Анри решать задачи в уме без промежуточных вычислений на бумаге и запоминать излагаемый профессором материал, делая лишь краткие пометки.

В классе специальной математики Анри подружился на всю жизнь с учащимся Полем Аппелем, приехавшем из Страсбурга в отторгнутом немцами Эльзасе. Аппель тоже сдал в Нанси экзамены на степень бакалавра словесности и бакалавра наук. Для всех лицеев Франции, где были такие классы, проводился общий конкурс по итогам успеваемости, работы проверялись в Париже. На этом конкурсе Пуанкаре занял первое место, а Аппель – второе. Эти друзья стали символом французской доблести на ниве просвещения, поскольку оба проживали на территории, где совсем недавно закончились военные действия.

Летом 1873 г. Пуанкаре и Аппель сдали вступительные экзамены в Высшую Нормальную школу – второе по престижу высшее учебное заведение Франции, готовившее преподавателей для вузов. Аппель стал студентом этой школы, а Пуанкаре, занявший пятое место по результатам экзаменов, решил сдавать экзамены в главное учебное заведение Франции – Политехническую школу. В октябре 1873 г. Анри Пуанкаре стал студентом-политехником, заняв первое место по результатам вступительных экзаменов. Кроме математики, туда нужно было сдавать много других экзаменов: физику, химию, латынь, немецкий язык, черчение и рисование. Пуанкаре не любил и не умел рисовать. Его рисунок акварелью на экзамене заслуживал нулевую оценку, но все же ему поставили за рисунок один балл, что не повлияло на его первое место по итогам экзаменов.

Политехническая школа была создана в революционное время в 1795 г. благодаря деятельному участию Монжа и Лагранжа. Кроме них в этой школе преподавали Фурье, Коши, Пуассон, Лиувилль, Эрмит и многие другие выдающиеся математики. Обучение в этой школе было двухлетним и напоминало первые два курса нынешних технических вузов. Она готовила инженеров, которые после окончания этой школы должны были пройти специализированное техническое обучение, например, в Горной школе. Многие инженеры после работы по специальности и защиты диссертации становились преподавателями престижных высших учебных заведений или занимали видные посты в промышленных учреждениях. По внутреннему распорядку Политехническая школа мало чем отличалась от военного училища. Этот распорядок ввел специальным декретом Наполеон Бонапарт в 1804 г. после того, как студенты этой школы отказались дать ему присягу, когда он объявил себя императором. Студенты курса представляли собой батальон, поделенный на роты. Начальником школы был генерал, в его распоряжении было два капитана и несколько лейтенантов. Студенты жили в интернате в помещении школы, ложились спать и посыпались в определенное время. Выходить в город студентам разрешалось только по увольнительным в выходные дни. Занятия проводились на очень высоком уровне. Знания буквально вколачивались в головы учащихся, так как, кроме лекторов, был еще штат репетиторов, которые занимались консультированием и проверкой знаний студентов.

Учеба в политехнической школе давалась Анри Пуанкаре легко. По общему количеству баллов успеваемости он неизменно занимал второе место, хотя по основным предметам – первое. Он проявлял мало интереса к физическим и военным упражнениям, а при стрельбе в тире обычно занимал последние места. Иногда к нему в Париж приезжала мать с его сестрой на свидания. По выходным дням он поддерживал отношения с Аппелем, учившимся в Нормальной школе, и членами одной знакомой семьи, переехавшей из Нанси в Париж, ходил с ним в театр.

Курс математического анализа в Политехнической школе тогда читал **Шарль Эрмит (1822–1901)**, бывший в то время главным математиком Франции. Он родился в г. Дьёз (в Лотарингии), в 1845 г. окончил Политехническую школу, был учеником Э. Ш. Каталана и Ж. Лиувилля. В 1848–1869 гг. работал репетитором, а в 1869–1876

гг. – профессор Политехнической школы, в 1869–1897 гг. – также профессор Парижского университета. С 1856 г. – член Парижской АН.

Ш. Эрмит является автором около 200 статей, но они не очень выделяются новизной методов. Основные его работы относятся к эллиптическим функциям и их приложениям, общей теории функций, теории решения алгебраических и трансцендентных уравнений, теории рядов и определенных интегралов, теории ортогональных многочленов (многочлены Эрмита или Чебышева), теории чисел и алгебраических форм (формы Эрмиты). Особенно выжным его результатом является решение любого алгебраического уравнения 5-й степени в эллиптических модулярных функциях. Он исследовал вопрос о представлении целых чисел алгебраическими формами. Доказал трансцендентность числа e. Среди учеников Эрмита много выдающихся математиков: А. Пуанкаре, Э. Пикар, Г. Дарбу, Э. Борель, К. Жордан, П. Аппель, П. Пенлеве. Эрмит вел переписку со многими выдающимися математиками. Его именем назван кратер краевой зоны Луны. О Ш. Эрмите см. книгу [142]. Пуанкаре не только слушал лекции Эрмита, но и изучал его труды.

Во время учебы в Политехнической школе Пуанкаре благодаря Аппелю лично познакомился с единственным в своем роде математическим дуэтом – выдающимися французскими математиками **Шарлем Брио (1817–1880)** и **Жаном Буке (1819–1885)**. Эти математики в то время были профессорами Нормальной школы, которую окончили в 1842 г. После окончания этой школы они преподавали в разных провинциальных лицеях, снова встретились в Лионе на факультете наук и с тех пор, переехав в Париж, совместно писали свои работы. В 1856 г. они опубликовали фундаментальную монографию в трех частях (без общего названия), которая явилась поворотным пунктом в развитии аналитической теории дифференциальных уравнений в комплексной области (об этой работе см. [156, гл. 3]). Брио и Букс написали также крупную монографию «Теория эллиптических функций» (1876). Они ввели термины «голоморфная» и «мероморфная» функции. Знакомство с работами Брио и Буке вызвало интерес Пуанкаре к теории дифференциальных уравнений. После переезда в Париж Брио и Буке работали в лицеях, а затем профессорами в Нормальной школе, в Сорбонне, а Буке – и в Политехнической школе. Буке – член Парижской АН с 1875 г.

К новому учебному году в 1874 г. Пуанкаре опубликовал в «Анналах математики» свою первую научную статью. Она посвящена методам исследования кривизны поверхности. Она не отличается оригинальностью и никак не связана с его будущим творчеством. Пуанкаре пишет родителям, что изучает труды Эрмита и Якоби.

В 1875 г. Пуанкаре закончил Политехническую школу и поступил (а точнее – зачислен) в Горную школу, где обучение продолжалось три года. Студенты этой школы уже считаются государственными служащими и даже получают определенное содержание. Анри живет в пансионе, строгий режим остался позади. Занятия в Горной школе его не обременяют. Пуанкаре готовится и сдает в августе 1876 г. на Факультете наук в Сорбонне экзамены на степень лиценциата – первую ученую степень, дающую право преподавать в лицеях. После этого Пуанкаре провел стодневную командировку в Австро-Венгрию, где изучал эксплуатацию шахт по добыче олова и каменного угля. Из наук, изучаемых в Горной школе, его интересовала только минералогия в связи с групповыми свойствами кристаллов. В 1870 г. вышел знаменитый «Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях» **Камилла Жордана (1828–1922)**. Он закончил еще раньше Политехническую и Горную школы, работал в Политехнической школе и Коллеж де Франс. Свои работы по теории групп и «Трактат», в котором с помощью теории групп изложена теория Галуа, он написал под влиянием своего увлечения минералогией и кристаллографией в Горной школе. Пуанкаре был знаком с его работами. Трехлетнее обучение в Горной школе окончилось для Пуанкаре стодневной командировкой на шахты в Швецию и Норвегию в 1878 г.

2. Годы творческой жизни Пуанкаре.

В течение последних двух лет обучения в Горной школе Пуанкаре усиленно работает над диссертацией. Ее тема была навеяна чтением одной заметки Брио и Бруке по дифференциальным уравнениям в частных производных. **Гастон Дарбу (1842–1917)**, профессор Сорбонны и Нормальной школы, ознакомившись с диссертацией Пуанкаре, сказал, что она содержит материалы на много хороших диссертаций, но в некоторых местах требует исправлений и разъяснений. Доработав диссертацию, Пуанкаре отдал ее на рассмотрение комиссии, состоящей из Дарбу,

Бонне и Буке. В апреле 1879 г. Пуанкаре был распределен в Везуль в качестве горного инженера для инспектирования каменноугольных шахт. Он начинает писать художественный роман без названия и заканчивает его через год. В августе 1879 г. Пуанкаре успешно защитил в Парижском университете докторскую диссертацию «О свойствах функций, определяемых дифференциальными уравнениями в частных производных».

Докторская диссертация давала Пуанкаре право преподавать в высших учебных заведениях. В декабре 1879г. Пуанкаре переезжает в г. Кан (в Нормандии) и начинает работать там доцентом в университете. Канский университет был одним из лучших провинциальных университетов Франции. Лекции Пуанкаре в Кане, как свидетельствует проживавший там его друг Лекорню, не вызывали восторга у слушателей. Пуанкаре не снисходил к тому, чтобы разъяснять студентам то, что ему казалось совершенно очевидным.

В 1880–1884 гг. Пуанкаре очень интенсивно занимается разработкой теории автоморфных функций, т. е. однозначных аналитических функций, не меняющихся под действием на их аргумент групп дробно-линейных преобразований. Будучи в Кане, он опубликовал в 1881 г. в *Comptes rendus* свою первую статью по этим функциям. Мысль заняться этими функциями возникла у него при чтении одной статьи по дифференциальным уравнениям выдающегося немецкого математика **Лазаруса Фукса (1833–1902)**, в которой упоминается о такой функции и возможном ее применении к дифференциальным уравнениям. К тому времени Фукс был уже широко известным математиком, позже его именем был назван один важный класс линейных дифференциальных уравнений n-го порядка в аналитической теории дифференциальных уравнений. Но Фукс никогда не занимался автоморфными функциями. Пуанкаре необоснованно назвал их фуксовыми, не зная, что ими уже занимаются, хотя и не в общем виде, немецкие математки Г. А. Шварц и Ф. Клейн (см. выше с. 116). До опубликования своей первой работы по этим функциям Пуанкаре отослал ее в 1880 г. на конкурс «Гран-при» Парижской АН, но приза не получил, так как его работа была еще незрелой. После этой работы последовала бурная серия публикацией Пуанкаре по теории автоморфных функций: в течение года – 13 кратких статей в *Comptes rendus,* подытоженных затем в большой статье в журнале *Mathematische Annalen*. До 1884 г. Пуанкаре опубликовал в *Acta*

mathematica еще пять больших работ по этой теории. Таким образом, Пуанкаре очень широко разработал теорию автоморфных функций, а также рассмотрел вопрос об униформизации многозначных аналитических функций. С 1881 г. между Клейном и Пуанкаре завязалась дружеская переписка, они обменялись 26-ю письмами. В начале разработки Пуанкаре теории автоморфных функций Клейн напряженно соревновался с ним, но не выдержал и заболел. Позже Клейн вместо термина «фуксовы функции» ввел термин «автоморфные функции», принятый в настоящее время, но в [297] они называются автоморфными функциями Фукса, с указанием, что их изучил Пуанкере.

Находясь в Кане, Пуанкаре познакомился с девушкой Луизой Пулен д’Андеси, В 1881 г. состоялась их свадьба. У них родилось четверо детей – три дочери и сын.

Пуанкаре провел в Кане почти два года. Широта и оригинальность его работ по теории автоморфных функций уже тогда поставили его в ряд выдающихся математиков Европы. Его пригласили преподавать на Факультет наук в Парижском университете (Сорбонне), и в октябре 1881 г. он переезжает в Париж. Параллельно, с 1883 по 1897 год он преподавал математический анализ в Политехнической школе.

Наиболее близкими друзьями Пуанкаре в Париже были математики **Поль Аппель (1855–1930)** и **Эмиль Пикар (1856–1941)**. Они в том же году, что и Пуанкаре, переехал в Париж, а до этого преподавали в провинциях. С Аппелем Пуанкаре дружил уже с лицея. С 1885 г. Аппель – профессор рациональной механики в Парижском университете, член Парижской АН (с 1892 г.). Основные труды Аппеля – по механике и теории функций (гипергеометрических и эллиптических). Издал «Трактат рациональной механики» (1893–1896), т. 1–5. Э. Пикар сдал вступительные экзамены в Нормальную школу (1-е место) и в Политехническую (2-е место), окончил Нормальную школу. С 1896 г. – профессор Парижского университета, член Парижской АН (с 1877 г.). Основные работы – по теории функций, дифференциальным и интегральным уравнениям, теории алгебраических функций. В 1879 и 1880 гг. Пикар опубликовал доказательство своей знаменитой теоремы о поведении аналитической функции $f(z)$ комплексного переменного z в окрестности существенно особой точки. Он доказал также теорему: если алгебраическая кривая $\Phi(z,w)=0$ имеет род $g>1$, то ее невозможно униформизировать (параметризовать) с помощью мероморфных функций, т. е. не

существует никакой пары мероморфных функций $z = f(t)$, $w = h(t)$ таких, что $\Phi(f(t), h(t)) \equiv 0$. В 1890 г. Пикар использовал метод последовательных приближений для доказательства существования и единственности решений интегральных уравнений. Парижская АН учредила медаль имени Э. Пикара.

Усиленно разрабатывая теорию автоморфных функций, Пуанкаре в то же время начинает изучать вопрос о том, как, не решая обыкновенного дифференциального уравнения, можно по его виду судить о поведении семейства его решений. Известно, что только немногие типы дифференциальных уравнений можно решить в конечном виде с помощью каких-либо функций. По виду уравнения с помощью соответствующих теорем судили о существовании и единственности решения. Но до Пуанкаре никто не изучал вопроса, которым он занялся. Разрабатывая этот вопрос, он создал новый раздел теории дифференциальных уравнений, которому дал название «качественная теория дифференциальных уравнений». Введенные Пуанкаре названия особых точек в зависимости от поведения решений (траекторий) уравнений входят в учебники обыкновенных дифференциальных уравнений. Свои результаты по качественной теории дифференциальных уравнений Пуанкаре опубликовал в 1881–1886 гг. в четырех мемуарах под общим названием «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями». Свой подход к качественной теории дифференциальных уравнений позже он успешно применил в небесной механике и математической физике.

Эрмит, Пуанкаре, Пикар и Аппель вместе посещали С. В. Ковалевскую, приехавшую в Париж с конца 1881 до середины 1883 г. после разрыва с мужем, расспрашивали ее о Вейерштрассе. В Париж в 1885 г. приехал знаменитый 71-летний английский математик Джозеф Сильвестр, чтобы лично посетить и познакомиться с 31-летним Пуанкаре.

В 1885 г. Пуанкаре получил премию Понселе Парижской АН. Следующее десятилетие (1885–1895) Пуанкаре занимается решением сложных вопросов небесной механики и математической физики.

Немного ранее 1895 г. Пуанкаре начал заниматься исследованием фигур равновесия жидкой расплавленной вращающейся массы, которая представляет планету до ее остывания. Раньше этой проблемой занимались Ньютон, Маклорен и Якоби. Пуанкаре обнаружил, что кроме эллипсоидальных, имеются и другие фигуры

равновесия. По этим вопросам он опубликовал несколько статей, а в 1885 г. – обширный мемуар в журнале *Acta mathematica*. Аналогичным вопросом занимался в своей магистерской диссертации (1885 г.) А. М. Ляпунов, позже он широко обобщил эти свои исследования.

В 1885–1886 гг. Пуанкаре завершает построение так называемой качественной теории дифференциальных уравнений.

В 1886 г. 32-летний Пуанкаре возглавляет кафедру математической физики и теории вероятностей Парижского университета.

В 1886 г. Пуанкаре избирают президентом Французского математического общества.

В 1887 г. он обобщил на случай нескольких комплексных переменных интегральную теорему Коши и обобщил теорию вычетов.

В 1887 г. Пуанкаре избрали действительным членом Парижской АН.

Скажем несколько слов о Парижской академии наук (французы называют ее просто Академий наук). Она входит в Институт Франции, созданный в 1795 г. и состоявший из пяти академий: Французская академия (главная ее цель – сохранение правильности и чистоты французского языка); Академия наук; Академия надписей (история, археология, языкознание); Академия изящных искусств (живопись, скульптура, архитектура, музыка); Академия моральных и политических наук (философия, экономика, правоведение, законодательство). Академия наук делилась на 11 секций, в ее состав входило 68 действительных членов, кроме них было 10 почетных и 8 иностранных членов. Было еще 100 членов-корреспондентов, их избирали не на общем собрании, а на собрании соответствующей секции.

Король Швеции Оскар II, интересовавшийся математикой, организовал к 1889 г. международный математический конкурс. Жюри состояло из Вейерштрасса, Эрмита и Миттаг-Леффлера. Оно предложило на выбор четыре темы, самой трудной была первая, которую предложил Вейерштрасс: продвинуться дальше в решении задачи трех тел (о движении трех планет, испытывающих взаимное притяжение). Работы, как обычно, подавались без указания имени участника, а под девизом. Премии получили два участника конкурса: Пуанкаре – по проблеме трех тел и Аппель – по иной теме. Никто не ожидал, что Пуанкаре выберет себе именно эту тему, несмотря на то, что остальные три темы были в сфере его научных интересов.

За этот успех французское правительство наградило Пуанкаре и Аппеля орденом Почетного легиона.

Кроме чтения лекций по математической физике, Пуанкаре читает студентам лекции по электромагнетизму, будучи увлеченным этой новой успешно развивающейся теорией. В 1890 г. опубликованы его работы об опытах Герца, открывшего элекромагнитные волны, а также свои лекции «Электричество и оптика».

В 1889–1892 гг. выходит фундаментальный труд Пуанкаре «Курс математической физики» в 10 томах. Пуанкаре становится признанным главой французских математиков.

И сразу же, как результат необыкновенной творческой продуктивности Пуанкаре, в 1892 г. выходит первый том его монографии «Новые методы небесной механики», в 1893 г. – второй том. Третий том этой монографии опубликован в 1899 г.

С 1893 г. Пуанкаре – член Бюро долгот (так исторически называется Парижский институт небесной механики), в 1899 г. избран его президентом.

В 1894 г. Пуанкаре избран членом Лондонского королевского общества.

В 1895 г. выходит мемуар Пуанкаре «Analysis situs», с которого начинается топология как самостоятельная наука. В том же году опубликованы четыре его статьи «К теории Лармора», где он впервые формулирует принцип относительности.

С 1896 г. Пуанкаре переходит в качестве заведующего на кафедру небесной механики Парижского университета, эту должность он исполняет до конца жизни. В 1896 г. ему присуждена премия Жана Рейно Парижской АН.

В 1898 г. опубликована статья Пуанкаре «Измерение времени», в которой он показывает относительность понятия одновременности.

В 1899 г. опубликован третий том «Новых методов небесной механики» Пуанкаре. В 1900 г. Королевское астрономическое общество в Лондоне присудило Пуанкаре золотую медаль.

В 1899 г. выходит книга Пуанкаре «Теория Максвелла и герцевские колебания. Беспроволочная телеграфия».

В 1899–1904 гг. Пуанкаре публикует пять дополнений к мемуару «Analysis situs», изданному в 1895 г. Таким образом, благодаря Пуанкаре, появилась новая наука – топология, получившая в XX веке широкое развитие.

Пуанкаре был одним из организаторов и принимал участие в работе Второго международного математического конгресса в августе 1900 г. в Париже (в качестве председателя конгресса). Там было 226 участников. Пуанакре выступил с докладом «О соотношении между чистым анализом и математической физикой». На этом конгрессе Д. Гильберт в своем докладе «Математические проблемы» привел в качестве 22-й проблему Пуанкаре об униформизации аналитического соотношения между двумя комплексными переменными. Ранее Пуанкаре решил проблему униформизации для алгебраических соотношений, а для аналитических еще не полностью.

В 1900 г. Пуанкаре принимал участие и в работе Международного физического конгресса (в качестве вице-председателя). Кроме того, в том же году он принимал участие и в работе Первого международного философского конгресса в Париже, где выступил с докладом «О принципах механики». Здесь, в частности, он изложил свою философию науки, которая получила название «конвенционализм» (от лат. *conventio* – договор, соглашение). Она больше относится к математике, чем к физике, поскольку физические теории тесно связаны с опытом, а математика развивается по своим законам. Согласно Пуанкаре, научные теории являются временными условиями соглашениями, хотя и приспособленными в той или иной мере к опыту, но далеко не всегда отражающие объективную реальность. Они должны быть непротиворечивыми, их нужно выбирать из соображений простоты и удобства. Непосредственным примером для конвенционалистской концепции Пуанкаре послужило развитие геометрии: долгое время знали только евклидову геометрию, а в XIX в. появились неевклидовы геометрии. Для практических применений выбирают евклидову геометрию из-за ее простоты и удобства

В 1900 г. Пуанкаре был награжден медалью Сильвестра от Лондонского королевского общества.

В 1902 г. вышло первое издание книги Пуанкаре «Наука и гипотеза», она имела очень большой успех. Сначала он в популярной форме знакомит читателей с неевклидовыми геометриями. В третьей части книги Пуанкаре приводит ряд положений, которые немного позже войдут в созданную им и А. Эйнштейном специальную теорию относительности (относительность пространства и времени, относительность движения). Пуанкаре пишет и о гипотезах в физике. Эту книгу

изучал молодой Эйнштейн вместе со своими друзьями. Столь же большой успех имели и книги Пуанкаре «Ценность науки» (1905) и «Наука и метод» (1908). Уже после смерти Пуанкаре вышла еще одна книга из этой серии под названием «Последние мысли» (1913). На русском языке эти четыре книги изданы вместе в книге [295], второе ее издание вышло в 1990 г. Здесь Пуанкаре в ясной и доступной широкому кругу читателей форме говорит о многих достижениях математики и механики того времени и о методологии науки вообще. В книге «Наука и метод» он, в частности (см. [295, с. 309–320]), говорит о сущности математического творчества, иллюстрируя это на собственном опыте. Главную роль в математических открытиях играет интуиция, а логике отведена роль обоснования интуитивных озарений.

В 1904 г. Пуанкаре присуждена медаль Лобачевского от физико-математического общества Казани, а в 1905 г. – премия Бояи Венгерской АН.

В 1904 г. Пуанкаре выступил в Сент-Луисе (США) на Международном конгрессе искусства и науки с докладом «Настоящее и будущее математической физики». Здесь он первым сформулировал принцип относительности движения и сообщил, что из него возникнет новая механика. В том же году Пуанкаре утвержден в должности профессора общей астрономии в Политехнической школе.

А. Пуанкаре принадлежит приоритет в установлении основных положений специальной теории относительности (СТО). В отличие от общей теории относительности (ОТО), в СТО не используется гравитация. Пуанкаре опубликовал 5 июня 1905 г. краткое изложение своих результатов по СТО в статье «О динамике электрона» в журнале *Comptes rendus*, в подробное – в одноименной статье, вышедшей в январе 1906 г. в малоизвестном итальянском математическом журнале.

Альберт Эйнштейн (1879–1955) опубликовал свою статью по СТО в конце 1905 г., она носила более систематический и полный характер изложения. К сожалению, Эйнштейн не сослался в своей статье на Пуанкаре как своего предшественника в разработке СТО, поэтому долгое время мало кто знал о вкладе Пуанкаре в создание СТО и его приоритете. Подробно об истории создания СТО мы будем писать ниже в пункте 5.

В 1906 г. Пуанкаре избирают президентом Парижской АН (президент избирался сроком на один год). Опубликована вторым изданием его книга «Наука и гипотеза», а в 1908 г. вышла в свет его книга «Наука и метод».

В 1908 г. на IV Международном математическом конгрессе в Риме Пуанкаре выступил с докладом «Будущее математики».

Как уже отмечалось выше, Пуанкаре в 1887 г. был избран членом Парижской академии наук. А в 1909 г. его избирают во Французскую академию, главная цель которой – забота о чистоте и правильности французского языка. Это старейшая из пяти академий, составляющих Институт Франции, ее основал кардинал Ришелье в 1635 г. Она постоянно состоит из 40 членов. Избрание в эту академию считается очень большой честью. Кроме самых знаменитых французских писателей, хотя и не всех (в нее, например, не были избраны Мольер и Бальзак), сюда избирают также и представителей французской науки, культуры и политики, чьи произведения отличаются высокими литературными достоинствами. Членами Французской академии были ученые Д'Аламбер, Лаплас, Фурье, Кювье, Пастер и др. Поводом для избрания Пуанкаре послужили, главным образом, вышедшие к тому времени три его книги о науке, указанные выше.

В 1909 г. Пуанкаре по приглашению Гильберта прочел шесть лекций в Гёттингенском университете. Первые пять лекций он посвятил своим результатам по теории интегральных уравнений (интегральными уравнениями в это время занимался и Гильберт). Шестую лекцию Пуанкаре посвятил принципу относительности, связывая установление этого принципа в статье Лоренца 1904 г. При этом он обошел молчанием вопрос о своей роли и роли Эйнштейна в создании специальной теории относительности. Не упоминал он и Г. Минковского, развившего геометрию пространства-времени после того, как Пуанкаре в своей работе 1906 г. ввел четвертую, временну́ю координату *ict*.

В 1910 г. Пуанкаре выступил с лекцией в Берлине в аудитории общества «Урания». Здесь он проявил большую осторожность в оценке новой механики, основанной на СТО, заявив, что «новая механика стоит пока что на зыбкой почве. Ей следует поэтому пожелать новых подтверждений» [151, с. 360].

Пуанкаре живо интересовался новыми открытиями в физике в конце XIX и начале XX вв. (электрмагнитные волны, рентгеновское излучение, радиоактивность). В 1900 г. немецкий физик-теоретик Макс Планк ввел квант действия, предположив, что атом излучает энергию определенными порциям – квантами. Этим он положил начало квантовой механике. Пуанкаре очень заинтересовался этим вопросом. Его

пригласили участвовать в I Сольвеевском конгрессе физиков, который состоялся в 1911 г. в Брюселле и был специально посвящен обсуждению проблем квантовой теории. Пуанкаре принял участие в обсуждении этих вопросов и в своих трех статьях 1911–1912 гг. решительно выступил в поддержку квантовой гипотезы. В Брюсселе произошла единственная встреча Пуанкаре с Эйнштейном, взаимопонимания ими в отношении СТО не произошло. Но Пуанкаре был высокого мнения о способностях Эйнштейна как молодого ученого, что видно из характеристики Эйнштейна, выданной в 1911 г. Пуанкаре по запросу администрации Высшего политехнического училища в Цюрихе, куда Эйнштейн устраивался на должность профессора [151, с. 408].

В начале 1912 г. Пуанкаре избрали директором Французской академии. В мае 1912 г. он прочел в Лондонском университете несколько лекций, в том числе «О теории излучения», «О логике бесконечного», «О пространстве и времени».

У Пуанкаре почти не было учеников, работой которых он непосредственно руководил. Но его лекции производили большое впечатление на слушателей и стимулировали их к научной работе. Почти каждый учебный год он читал новый курс лекций. Студенты принимали участие в издании его лекций. Ряд из его учеников впоследствии стали выдающимися математиками, в частности Д. Помпейю, Э. Борель, О. Бэр, Л. Башелье, П. Кузен.

В 1908 г. во время пребывания Пуанкаре в Риме ему успешно прооперировали увеличенную предстательную железу. В 1912 г. возникла необходимость в повторной операции. Она прошла вроде бы успешно, но через неделю Пуанкаре неожиданно умер от эмболии – закупорки кровеносных сосудов. Ему было только 58 лет. Он похоронен в семейном склепе на кладбище Монпарнас в Париже.

Анри Пуанкаре является автором более 500 статей и нескольких книг по очень многим разделам математики, а также по небесной механике и физике. Парижской академией наук в 1916–1956 гг. издано собрание трудов Пуанкаре в 11 томах. Анри Пуанкаре был членом более 30 академий.

Феликс Клейн писал: «Пуанкаре представляет собой тип подлинного гения, который всюду с первого взгляда схватывает самое существенное. Он в равной мере владел геометрией и анализом, дар открытия и умение доказывать находилось у него в равновесии. Разве лишь область непосредственных приложений математики

оставалась у него в стороне – в отличие от таких математиков, как Архимед, Ньютон, Гаусс, которые наряду с теоретическими исследованиями занимались также экспериментами и измерениями и которых я по этой причине ставлю еще выше. Конечно, у него не обошлось и без теневых сторон. Подобно Коши, Пуанкаре публиковал свои работы очень быстро и поэтому не всегда тщательно отделывал их. […] Однако впоследствии у него развился блестящий и ясный стиль, который в сочетании с неисчерпаемым запасом замечательных по своей глубине идей принес огромный успех его получившим всеобщую известность трудам по философии математики» [140, с. 415–416]. Первое издание книги [140] Ф. Клейна, из которой мы взяли эту цитату, вышло в 1926 г.

В 1926 г. американский математик Джордж Биркгоф, будучи уже крупным математиком, профессором Гарвардского университета, выдвинул предложение о создании в Париже научно-исследовательского центра по математической физике имени Пуанкаре и пообещал привлечь для этого субсидию из рокфеллеровского фонда. В то время выдающийся французский математик Эмиль Борель занял пост военно-морского министра в правительстве, возглавляемом известным математиком П. Пенлеве. На американские и французские средства, благодаря стараниям Биркгофа и Бореля, в Париже в 1928 г. был создан Физико-математический институт имени А. Пуанкаре. Именем Пуанкаре назван кратер на обратной стороне Луны.

3. Творчество Пуанкаре в математике.

В небольшом очерке можно дать только краткие сведения о главных из многочисленных достижений Пуанкаре в различных областях математики. Мы приводим их в основном в хронологическом порядке

3.1. Автоморфные функции. Униформизация. Абелевы функции.

Представление о результатах Пуанкаре в этих вопросах можно получить по книге В. В. Голубева [297, гл. 8] (там автоморфные функции Пуанкаре называются функциями Фукса и Клейна), по очерку А. И. Маркушевича в [108, с. 240–247] и частично в книге Ф. Клейна [140, с. 414–421].

Одной из наиболее популярных теорий, разрабатываемых в математике XIX в., была теория эллиптических функций, ею занималось большинство выдающихся математиков, начиная с Гаусса. Ее разработка во многом способствовала

становлению в последние десятилетия XIX в. теории функций комплексного переменного как самостоятельной науки. Однако, вопреки ожиданиям, эллиптические функции не получили широкого применения в математике. Они являются двоякопериодическими и удовлетворяют только отдельным узким видам дифференциальных уравнений. Поэтому возникла необходимость разработки более широкого класса функций, а именно авторорфных функций.

Наиболее широко известным классом автоморфных функций является класс однозначных аналитических функций $f(z)$, инвариантных (т. е. не меняющихся) при действии на их аргумент некоторой группы дробно-линейных преобразований $T_n(z)=\dfrac{a_n z+b_n}{c_n z+d_n}$, $n=1,2,\dots$, $T_0(z)=z$, $a_n d_n - b_n c_n \neq 0$, где a_n, b_n, c_n, d_n – целые (обычно действительные) числа, $f(T_n(z))=f(z)$. При $a_n b_n - c_n d_n = 1$ такие функции $f(z)$ называются модулярными.

Дробно-линейные преобразования при $c_n=0$ представляют собой группу линейных преобразований, а если $a_n=d_n=1$ и $c_n=0$, то группу сдвигов $z+b_n$. В случае группы сдвигов вида $T_n(z)=z+\omega n$, $n=0,1,2,\dots$, автоморфные функции – это переодические функции с периодом ω, т. е. $f(z+n\omega)=f(z)$, где n – целое число. В частности, функции $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{tg} z$ явлютcя автоморфными (для них $\omega=2\pi$), а если ω – комплексное число, то и e^z – автоморфная функция (для нее $\omega=2\pi i$). Такие функции называются тривиальными или элементарными автоморфными функциями.

Отметим, что дробно-линейная функция $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ в , обладает так называемым круговым свойством: при этом отображении образом прямой или окружности является прямая или окружность, причем прямая может переходить и в окружность, а окружность может перейти и в прямую. Эта функция отображает расширенную комплексную плоскость взаимно однозначно и конформно на себя.

Исторически первый нетривиальный пример автоморфной функции впервые появился у Гаусса, это была модулярная функция, заданная в виде отношения квадратов некоторых двух рядов. Ее название происходит из-за того, что значение этой функции при $x=e^{-K'/K}$, где K и K' – полные эллиптические интегралы первого рода в форме Лежандра, равно дополнительному модулю $k'=\sqrt{1-k^2}$. Гаусс отметил свойство инвариантности этой функции относительности дробно-линейного

преобразования [108, с. 138–140]. Мы упоминали об этой функции Гаусса в [289, с. 43–44]. Позже эта функция встречается у Римана.

Г. А. Шварц, занимаясь конформными отображениями областей, ограниченных многоугольниками со сторонами, представляющими дуги окружностей, в 1873 г. пришел к той же модулярной функции совершенно по-иному, чем Гаусс. Шварц рассматривает вписанный в единичный круг треугольник с нулевыми углами, образованный тремя равными дугами окружностей, ортогональных к единичной окружности. Модулярную функцию $w = \lambda(z)$ он определяет как такое конформное отображение этого треугольника на полуплоскость $\operatorname{Im} w \geq 0$, что вершины треугольника переходят в точки $0, 1$ и ∞. При этом получается фигура, которая была и у Гаусса, но у Гаусса она была повернута на 90°. Далее эта аналитическая функция аналитически продолжается на весь круг по принципу симметрии Римана-Шварца [108, с. 140, 206–207, 242–243]. Таким образом, модулярная функция Шварца никак не связана с эллиптическими интегралами.

Ш. Эрмит в работе 1859 г. в связи с решением общего алгебраического уравнения 5-й степени с помощью эллиптических функций использует модулярную функцию (так называемый абсолютный инвариант эллиптических функций) [142, с. 140–143]. Пуанкаре был знаком с этой работой Эрмита. Модулярными функциями много занимался Ф. Клейн, он посвятил им два тома лекций, изданных в 1902 г.

Выше мы привели определение класса автоморфных функций, инвариантных при действии на их аргумент группы дробно-линейных преобразований. Другие классы автоморфных функций получаются, если составляющие их функции являются однозначными аналитическими функциями, инвариантными относительно действия на их аргумент других дискретных групп преобразований. Так, эллиптические функции являются автоморфными. Это однозначные двоякопериодические функции, т. е. с периодами $2\omega_1$ и $2\omega_2$, где ω_1 и ω_2 – действительные или комплексные числа такие, что их отношение $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ не является действительным числом. Эти функции $f(z)$ инвариантны относительно группы дискретных преобразований, переводящих аргумент z в $z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2$, где m, n – целые числа, т. е. $f(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2) = f(z)$.

Точки $(2m\omega_1, 2n\omega_2)$ являются вершинами параллелограммов (в частности прямоугольников) периодов, «паркет» из которых заполняет всю комплексную

плоскость. Каждый из этих параллелограммов представляет собой так называемую фундаментальную область эллиптической функции. Каждому аргументу z отвечает одно значение w эллиптической функции $w = f(z)$, а каждому ее значению w – точка в каждой из фундаментальных областей эллиптической функции. Поэтому эллиптическая функция является однозначной, а обратная ей – многозначной (с многолистной римановой поверхностью). Для каждой фундаментальной области (параллелограмма периодов) эллиптической функции множество ее значений устроено одинаково (повторяется) подобно тому, как для однопериодических функций их значения повторяются при изменении аргумента на период. Поэтому такие функции обладают определенной симметрией.

Аналогичная ситуация и с автоморфными функциями вообще. Фундаментальные области, например, модулярных функций часто состоят из треугольников, образованных дугами окружностей и покрывающих, как «паркет», область определения функции (обычно круг). Такие функции, как и автоморфные функции вообще, обладают определенной симметрией (точнее, закономерностью) в расположении фундаментальных областей, но сами эти области не сохраняют размеров и уменьшаются при приближении к границе области определения функции – граничной (предельной) окружности. Автоморфные функции можно строить, выбирая определенного вида фундаментальные области и их расположения, а также группы преобразований аргумента, относительно которых эти функции инвариантности.

В начале пункта 2 говорилось о том, что в 1881–1884 гг. молодой Анри Пуанкаре опубликовал большую серию статей, посвященных разработке теории автоморфных функций, и тем самым сразу поставил себя в ряд выдающихся математиков. Ему принадлежат здесь основные определения и методы исследования. До него Шварц и Клейн изучали автоморфные функции, относящиеся к разряду элементарных, в частности, представляющие рациональные аналитические функции. Пуанкаре ввел понятие «собственно разрывных» групп преобразований и выделил из общей группы $S = (T_n(z))$ дробно-линейных преобразований две наиболее важные, которые назвал фуксовыми и клейновыми. (Л. Фукс не занимался ими, но не возражал против использования своего имени, а Ф. Клейн занимался, но возражал.) Для фуксовых групп (групп с граничной окружностью) существует фиксированный

круг (или полуплоскость), преобразуемый посредством каждого $T_n \in S$ в себя; для клейновых роль граничной окружности играет сфера.

Для Пуанкаре источниками его теории автоморфных функций послужили теория линейных дифференциальных уравнений, теория эллиптических функций и геометрия Лобачевского. Пуанкаре рассматривает линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с рациональными (или алгебраическими) коэффициентами от переменного x. Интеграл такого уравнения может оказаться очень сложной функцией, ее можно в окрестности точки x_0 представить в виде ряда. Вместо этого локального подхода Пуанкаре использует глобальный. Он представляет переменное x как функцию интеграла, впрочем не одного, а от отношения z двух линейных независимых интегралов, т. е. $x = x(z)$. Эта функция однозначна и для нее существует фуксова группа дробно-линейных преобразований с действительными коэффициентами, относительно которой функция $x = x(z)$ инварианта. Пуанкаре обнаруживает, что в случае изучаемых им фуксовых функций роль, аналогичную параллелограммам периодов эллиптической функции, играют многоугольники, ограниченные дугами окружностей. Чтобы убедиться, что эти многоугольники покрывают внутренность единичного круга полностью и без наложений, Пуанкаре привлекает геометрию Лобачевского.

В связи с этими вопросами Пуанкаре в 1882 г. получил свои главные достижения в геометрии: он дал интерпретацию геометрии Лобачевского в двух вариантах. О них мы подробно писали в [289, с. 159–160] в очерке о Н. И. Лобачевском, поэтому здесь скажем о них кратко. В одной из них в качестве плоскости Лобачевского рассматривается верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$. Роль прямых Лобачевского здесь выполняют полуокружности или полупрямые, ортогональные действительной оси $\operatorname{Im} z = 0$, играющей роль бесконечно удаленной прямой. Углами между прямыми Лобачевского являются обычные углы между полуокружностями. Параллельным прямым Лобачевского отвечают полуокружности с общим концом на действительной оси. Второй вариант интерпретации Пуанкаре геометрии Лобачевского получается из первого путем некоторого дробно-линейного преобразования полуплоскости в единичный круг $|z| \le 1$, при этом действительная ось переходит в окружность $|z| = 1$ (предельная окружность). Несколько позже

Клейн дал интерпретацию пространства Лобачевского. Группа движений плоскости Лобачевского (гиперболической плоскости) в интерпретации Пуанкаре является группой $S = (T_n(z))$ дробно-линейных преобразований, Пуанкаре назвал ее фуксовой. Пуанкаре изучил и группу движений пространства Лобачевского, назвав ее клейновой. Она тоже задается дробно-линеными преобразованиями. Пуанкаре изучил автоморфные функции, отвечающие фуксовым и клейновым группам.

Один из способов построения автоморфных функций Пуанкаре заключался в использовании аналогии с эллиптическими функциями. Он брал фундаментальные области в виде некоторых многоугольников с четным числом попарно равных сторон, состоящих из дуг окружностей, и доказывал теорему о том, что ими можно сплошь и без наложений покрыть неевклидову плоскость.

Задача построения фуксовых функций по заданной фуксовой группе была решена одновременно Клейном и Пуанкаре. При этом Клейн использовал методы теории алгебраических функций на римановых поверхностях, а Пуанкаре построил автоморфные функции в виде отношения так называемых тэта-рядов Пуанкаре, связанных с соответствующими дробно-линейными преобразованиями.

Кроме приложения автоморфных функций к теории дифференциальных уравнений, Пуанкаре применил их к решению очень важной проблемы теории функций, а именно к **проблеме униформизации многозначных функций**. Она заключается в том, чтобы для данной многозначной аналитической функции $y = f(x)$ найти такой параметр t, через который x и y выражались бы уже как однозначные функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ в некоторой области изменения параметра t. Многозначные функции часто задаются неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Если $F(x, y)$ многочлен с целыми коэффициентами, то уравнение $F(x, y) = 0$ определяет алгебраическую функцию $y = f(x)$, а соответствующая кривая называется алгебраической. Простейшие примеры униформизации (называемой параметризацией) были известны еще с древности. Например, алгебраическое уравнение $x^2 + y^2 = 1$ можно униформизировать в виде $x = \cos t$, $y = \sin t$, либо в виде $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

До Пуанкаре возможность униформизации алгебраических функций была известна лишь для кривых рода 0 (т. е. уникурсальных кривых), их можно униформизировать с помощью рациональных функций, а также для кривых рода 1

(к ним, в частности, относятся кривые 3-го и 4-го порядков), их можно униформизировать с помощью эллиптических функций.

Пуанкаре решил задачу униформизации сначала в случае любого алгебраического уравнения $F(x,y)=0$, а затем поставил перед собой очень трудную глобальную задачу: униформизировать любую многозначную аналитическую функцию комплексного переменного. В 1883 г. Пуанкаре опубликовал доказательство, хотя и с некоторыми пробелами, теоремы о том, что любую многозначную аналитическую функцию можно униформизировать с помощью автоморфных функций, которые, как известно, являются однозначными.

Пуанкаре и итальянский математик Вито Вольтерра независимо друг от друга доказали и в 1888 г. опубликовали теорему о том, что любая многозначная аналитическая функция имеет не более чем счетное число значений, она называется теоремой Пуанкаре – Вольгерра.

В 1900 г. на II Международном математическом конгрессе Д. Гильберт в качестве 22-й проблемы предложил устранить пробелы, имевшиеся в доказательстве Пуанкаре теоремы об униформизации любой многозначной аналитической функции с помощью автоморфных функций. В 1907 г. это сделал сам Пуанкаре, а также немецкий математик П. Кёбе. А. И. Маркушевич пишет, что эту теорему Пуанкаре «можно по справедливости считать вершиной всего развития теории аналитических функций комплексного переменного в XIX в.» [108, с. 247].

Выше в очерке о Вейерштрассе на с 78 мы говорили о затруднениях Вейерштрасса в его исследовании **абелевых функций**. Главная роль в преодолении этих затруднений принадлежит Пуанкаре. Теорему существования общих абелевых функций p комплексных переменных при заданной матрице $2p$ периодов высказали независимо Риман и Вейерштрасс. Однако первое ее доказательство опубликовали в 1883 г. в совместной работе Пуанкаре и Пикар. При этом авторы пользовались высказанным без доказательства в 1862 г. в печати утверждением Вейерштрасса о том, что между любыми $p+1$ абелевыми функциями с одними и теми же периодами существует алгебраическое соотношение. В общем виде Вейерштрассу не удалось доказать это утверждение. Полное доказательство дал Пуанкаре в 1897 г.

Вейерштрассу не удалось полностью решить проблему Якоби обращения абелевых интегралов. Это сделал Пуанкаре вместе со своим учеником П. Кузеном.

Попутно Пуанкаре пришел к одной из своих самых замечательных теорем: если функция $f(z)$ в окрестности каждой конечной точки ведет себя как рациональная функция, то она может быть представлена в виде частного двух целых функций, в частности степенных рядов. (Здесь z, вообще говоря, n-мерное.) В частности, эта теорема верна для любой мероморфной функции. Вейерштрассу удалось доказать ее только в случае $n=1$. Пуанкаре доказал ее в 1883 г. для случая двух комплексных переменных (x, y), однако его доказательство было сложным. Сравнительно простое доказателство для случая n комплексных переменных дал П. Кузен в своей докторской диссертации в 1895 г., поэтому она называется теоремой Пуанкаре–Кузена.

3.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

Теории диффереціальных уравнений (обыкновенных, в частных производных, в том числе уравнениям математической физики) Анри Пуанкаре посвятил очень много работ. Его докторская диссертация «О свойствах функций, определяемых дифференциальными уравнениями в частных производных» (1879) посвящена исследованию решений и особым точкам рассматриваемой системы. Пуанкаре обладал способностью параллельно работать над разными темами исследований. Печатая много работ по автоморфным функциям, он в то же время в 1881–1882 гг. публикует две работы под общим названием «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» для уравнений первого порядка. В первый из них для уравнений вида $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами, он классифицирует возможные особые точки решений этих уравнений. В 1885 и 1886 гг. вышло еще две больших статьи под тем же общим названием, но уже для дифференциальных уравнений 2-го порядка. В этих статьях Пуанкаре завершил свою работу по созданию совершенно нового раздела теории дифференциальных уравнений, который получил название «качественная теория дифференциальных уравнений». Эта теория позволяет по виду дифференциального уравнения, не решая его, найти особые точки уравнений в области расположения семейства решений, т. е. интегральных кривых, и о характере поведения этих кривых в окрестности особых точек. Так, например, система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \qquad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

(или одно уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{cx+d}{ax+b}$) имеет особую точку $(x,y) = (0,0)$. Решаем не саму систему, а характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

и по его корням определяем вид особой точки $(0,0)$: если корни действительные, различные и одного знака, то особая точка – узел: если разных знаков – седло; если комплексные с ненулевой действительной частью – фокус, а если чисто мнимые – центр. Названия особой точки связаны с поведением интегральных кривых (с точки зрения механики – траекторий движения точки (x,y) в зависимости от времени t). Так, в случае узла траектории пересекаются в особой точке, а в случае центра – окружают ее. Пуанкаре открыл, что некоторые уравнения и системы имеют так называемые предельные циклы – замкнутые траектории, к которым, не пересекая их, интегральные кривые неограниченно приближаются извне, как бы навиваясь, и аналогично – изнутри. Исследованием предельных циклов занимался также шведский математик И. О. Бендиксон (1861–1935), профессор математики в Стокгольме, поэтому теория предельных циклов дифференциальных уравнений носит название теории Пуанкаре – Бендиксона [197, т. 4, с. 753–754]. Пуанкаре доказал, что уравнение может иметь лишь конечное число предельных циклов, за исключением нескольких специальных случаев. Качественную теорию дифференциальных уравнений разрабатывал и А. М. Ляпунов.

Пуанкаре занимался также интегральными инвариантами, имеющими связь с системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,...,x_n), \qquad i = 1,...,n.$$

Он первым дал одно из определений интегрального инварианта как интеграла, который не меняется под действием на его область интегрирования потока, определенного этой системой. При этом он записывал подынтегральные выражения в виде введенных им внешних дифференциальных форм. Попутно он в 1899 г. дал многомерное обобщение формулы Стокса для поверхностных интегралов, использовав внешние дифференциальные формы.

Для уравнений в конечных разностях Пуанкаре создал асимптотический анализ решений.

Пуанкаре посвятил много работ дифференциальным уравнениям в частных производных, особенно уравнениям математической физики, возглавлял в течение 11 лет (1885–1896) кафедру математической физики и теории вероятностей. Он внес существенные улучшения в теорию потенциала, теорию теплопроводности и гидродинамику, рассмотрел колебания «мембран» и трехмерных континуумов.

Пуанкаре добился успеха в решении так называемого уравнения «колебаний мембраны»

$$L_\lambda(u) \equiv \Delta u + \lambda u = 0,$$

для которого в достаточно правильной области G разыскивается решение, обращающееся в нуль на контуре области. Для решения этой задачи Г. А. Шварц ввел «функцию Грина» области G, доказал существование этой функции, а также существование наименьшего собственного значения этой задачи. У Бурбаки читаем: «Наконец, в 1894 г. в своем знаменитом мемуаре […] А. Пуанкаре удалось доказать существование и основные свойства всех собственных значений, рассматривая при заданной «правой части» f решение u_λ уравнение $L_\lambda(u) = f$, которое обращается в нуль на контуре области, и показывая с помощью искусного обобщения метода Шварца, что u_λ есть мероморфная функция комплексной переменной λ, имеющая только простые действительные полюсы λ_n, которые и являются искомыми собственными значениями [8, с. 220].

Пуанкаре разработал метод малого параметра для решения систем дифференциальных уравнений в теории колебаний и использовал его в небесной механике, о чем мы будем говорить ниже в пункте 4. Он решил также ряд задач из теории электромагнетизма.

Выше в очерке о Римане мы писали о принципе Дирихле, использованном Риманом в необоснованном виде при построении теории аналитических функций, что вызвало критику со стороны Вейерштрасса. Кроме Д. Гильберта, в обосновании этого принципа принял участие Пуанкаре, предложив свой «метод выметания».

Итогом исследований Пуанкаре по математической физике и педагогической деятельности на возглавляемой им кафедре стало издание в 1889–1892 гг. его 10-томного «Курса математической физики».

3.3. Алгебра и теория чисел.

Пуанкаре в ранний период творчества исследовал кубические, тернарные и кватернарные формы. С алгебраической точки зрения главным у Пуанкаре является теоретико-групповой подход, ставший для него важнейшим инструментом исследования во многих областях его деятельности. Это группа дробно-линейных подстановок, в частности, введенные им фуксовы и клейновы группы в теории автоморфных функций, группы Бетти и фундаментальная группа в топологии, группа Лоренца в теории относительности и другие. Будучи равнодушным к вопросу о своем приоритете, Пуанкаре дал этим группам имена, обладатели которых, кроме Клейна, не рассматривали эти группы.

Иногда приходится решать линейные системы n алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i, \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

где $n \to \infty$, с помощью определителей n-го порядка. При $n \to \infty$ такие определители называются «определителями бесконечного порядка». В 1886 г. Пуанкаре (после работ Хилла), а за ним и фон Кох построили теорию таких определителей. Она послужила Фредгольму образцом для построения его «определителей» при решении интегральных уравнений [8, с. 221].

Понятие идеала в алгебре ввел Дедекинд, мы писали об этом выше. В 1903 г. в мемуаре об алгебраическом интегрировании линейных дифференциальных уравнений Пуанкаре определил в алгебре понятия левых и правых идеалов, а также минимального идеала, и получил некоторые их свойства [8, с. 118–119].

Пуанкаре принадлежит несколько теоретико-числовых работ, связанных с диофантовыми уравнениями. В [243, с. 85] мы писали о работе Пуанкаре «Об арифметических свойствах алгебраических кривых» (1901). Там он определил операцию, равносильную операции сложения рациональных точек эллиптической кривой. Он показал, что эти точки образуют коммутативную группу. Затем он привел классификацию алгебраических кривых вида $f(x, y) = 0$ порядка m и рода 0 и 1 на основе бирациональных преобразований (см. [21], вып. 20).

3.4. Топология.

Одним из важнейших достижений Пуанкаре в математике является создание основ новой математической дисциплины – комбинаторной топологии, главной целью которой является изучение геометрических объектов (главным образом, многообразий) с помощью их разбиений на более элементарные части и исследования таких частей в зависимости от их границ.

Предшественниками Пуанкаре в этих вопросах были Бернхард Риман и итальянский математик Энрико Бетти (1823–1892). Выше в очерке о Римане (см. стр. 19–21, 40–41) мы писали об этом. Риман дал определения односвязной и многосвязных областей в $\mathbb{R}^2$, поверхностей в $\mathbb{R}^3$, проводя соответсвующие их разрезы, а также наметил идею исследования n-мерных многообразий путем их разбиения и вычисления «порядков связности». (Понятие n-мерного многообразия является обобщением на n-мерный случай обычного понятия двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$.) Идеи Римана в топологии более систематически изложил в своей работе 1871 г. Э. Бетти, получивший для разбиений n-мерных многообразий некоторые числовые значения «порядков связности», послужившие для Пуанкаре прообразом введенных им «групп Бетти» и «чисел Бетти».

Комбинаторная топология как наука начинается по существу со знаменитого мемуара Анри Пуанкаре «*Analysis situs*» (1895), за которым в 1899–1904 он опубликовал еще пять дополнений к этому мемуару. Вместо термина «топология» (от греч. $\tau o \pi o \varsigma$ – «место» и $\lambda o \gamma o \varsigma$ – «слово», «закон») Пуанкаре использует латинский термин «*analysis situs*» (анализ положения), которым пользовался Риман, а еще раньше употребил Лейбниц, о чем мы писали выше на с. 20–21. А термин «топология» впервые использовал И. Б. Листинг в своей работе 1848 г. (см. выше с. 14).

Пуанкаре ввел основные понятия комбинаторной топологии: гомотопия, фундаментальная группа, полиэдр, симплекс, комплекс, цепь, цикл, группы гомологий. Кратко скажем об этих понятиях для тех, кто не знаком с ними.

Пусть M^n – n-мерное многообразие в $\mathbb{R}^m$. Путем называется непрерывное отображение $\gamma : I \to M^n$ отрезка I $(a \le t \le b)$ в многообразие M^n. Геометрически – это непрерывная кривая, одномерное многообразие. Пусть P и Q – фиксированные точки в некоторой области $D \subset M^n$. Будем рассматривать пути в этой области,

имеющие начало в точке P и конец в точке Q. Два таких пути γ_1 и γ_2 называются гомотопными, если путем непрерывной деформации (с помощью замены параметра t) можно перевести один в другой. Это обозначается в виде $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Вводится определенным образом «произведение» $\gamma_1\gamma_2$ путей γ_1 и γ_2, где сначала проходится путь γ_1, а затем γ_2.

Используя понятие гомотопии, Пуанкаре вводит одно из важнейших понятий топологии – фундаментальную группу. Рассмотрим множество путей (петель) γ, начинающихся и заканчивающихся в одной и той же точке P, т. е. замкнутых путей. Будем рассматривать классы таких замкнутых путей, объединяя в один класс все гомотопные между собой пути (петли). Пуанкаре показывает, что множество таких классов образует группу, которую он называет фундаментальной, она обозначается через $\pi_1(M^n, P)$ или просто $\pi_1(M^n)$. Групповой операцией здесь является произведение указанных выше классов. Если γ_1 – представитель класса a_1, а γ_2 – класса a_2, то произведением a_1a_2 классов является класс, представителем которого является произведение $\gamma_1\gamma_2$ путей, оно не зависит от выбора представителей классов.

Если γ – путь, принадлежащий a и γ' – путь, который можно стянуть в точку, то $\gamma\gamma' \sim \gamma$ и $\gamma'\gamma \sim \gamma$. Обозначая через e класс всех путей, стягиваемых в точку, получаем, что $ea = a$ и $ae = a$ для любого класса $a \in \pi_1(M^n, P)$, т. е. класс e является единицей этой группы. Если γ – какой-либо представитель класса a, то обозначим через γ^{-1} путь, пробегаемый в обратном направлении, а через a^{-1} содержащий его класс. Тогда каждый из путей $\gamma\gamma^{-1}$ и $\gamma^{-1}\gamma$ может быть стянут в точку, поэтому $aa^{-1} = e$, т. е. a^{-1} является классом, обратным классу a. Пуанкаре показал, что фундаментальная группа является топологическим инвариантом, т. е. если фигуры X и Y гомеоморфны, то фундаментальные группы $\pi_1(X)$ и $\pi_2(Y)$ изоморфны.

Примеры.

1. Если в пространстве X любой замкнутый путь можно стянуть в точку, то $\pi_1(X) = e$. Говорят, что это единичная (или тривиальная) группа, она состоит из одного элемента e. Примерами таких пространств X, для которых $\pi_1(X) = e$, являются все евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, а также шар $D^n = \left\{x : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \le 1\right\}$ в этом пространстве.

2. Для окружности $S^1 = \left\{ x : x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$ получается, что $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, т. е. группа целых чисел. Но для n-мерной сферы $S^n = \left\{ x : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1 \right\}$ при $n \geq 2$ имеем $\pi_1(S^n) = e$.

3. Для тора T^2 в трехмерном евклидовом пространстве $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (здесь $\oplus$ – прямая сумма).

Замкнутый путь является образом окружности S^1. Аналогично вместо замкнутых путей, проходящих через одну точку, можно рассматривать так называемые «сфероиды» – образы n-мерной сферы S^n при $n \geq 2$. Классы гомотопичных между собой сфероидов в пространстве $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ представляют собой гомотопические группы $\pi_n(X)$.

Кроме гомотопических групп Пуанкаре ввел в топологии группы гомологий. Для этого он ввел целый ряд понятий, связанных с представлением исследуемых фигур в пространстве $\mathbb{R}^n$ в виде некоторых частей.

Дадим представление о группах гомологий комплекса в $\mathbb{R}^n$, используя учебник С. П. Новикова и А. Т. Фоменко «Элементы дифференциальной геометрии и топологии» (М.: Наука, 1987, с. 364–367).

Нульмерный симплекс – это точка $a_0 \in \mathbb{R}^n$. Одномерный симплекс – это отрезок $[a_0, a_1]$, границей которого является объединение двух нульмерных симплексов: $[a_0]$ со знаком «-» и $[a_1]$ со знаком «+». Двумерный симплекс – это ориентированный треугольник $[a_0 a_1 a_2]$ с вершинами в точках a_0, a_1, a_2. Трехмерный симплекс – это тетраэдр $[a_0 a_1 a_2 a_3]$ с вершинами в точках a_0, a_1, a_2, a_3 и ориентированными гранями – треугольниками, т. е. двумерными симплексами. Аналогично определяется r-мерный симплекс $[a_0 a_1 ... a_r]$ с вершинами $a_0, a_1, ..., a_r$. Его гранями служат $(r-1)$-мерные симплексы, i-я грань – это симплекс $[a_0 a_1 ... a_{i-1} a_{i+1} ... a_r]$, в котором нет вершины a_i. Припишем i-й грани знак $(-1)^i$, тогда ориентированная граница симплекса $[a_0 a_1 ... a_r]$ имеет вид

$$\partial [a_1 a_2 ... a_r] = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i [a_0 ... \hat{a}_i ... a_r],$$

где запись $\hat{a}_i$ означает, что вершина a_i выброшена. В частности,

$$\partial[a_0] = 0,$$
$$\partial[a_0 a_1] = a_1 - a_0,$$
$$\partial[a_0 a_1 a_2] = [a_1 a_2] - [a_0 a_2] + [a_0 a_1].$$

Граница симплекса обладает свойством: $\partial\partial[a_0 a_1 ... a_r] = 0$. Это означает, что сама граница не имеет границы.

Комплекс K (симплициальный многогранник) – это по определению совокупность симплексов произвольной размерности, обладающая свойствами:

1) каждый симплекс, входящий в эту совокупность, входит в нее вместе со всеми своими гранями всех размерностей;

2) каждые два симплекса могут пересекаться (иметь общие точки) только по одной и притом целой грани какой-то размерности, либо один из них является границей другого.

Перенумеруем как-нибудь все вершины комплекса: $b_0, b_1, ..., b_n$. Тогда симплексы примут новые обозначения $[b_{i_0} b_{i_1} ... b_{i_k}]$.

Пусть G-некоторая коммутативная группа с групповой операцией в виде сложения (например, группа $G = \mathbb{Z}$ целых чисел).

Цепи C_r размерности r в комплексе K – это формальные линейные комбинации вида $C_r = \sum_i g_i \sigma_i$, где σ_i – различные r-мерные симплексы, записанные в данной нумерации вершин комплекса, а коэффициенты g_i – произвольные элементы группы G.

Граница цепи C_r – это цепь размерности $r-1$:

$$\partial C_r = \sum_i g_i (\partial \sigma_i),$$

она обладает свойством: $\partial\partial C_r = 0$, т. е. граница не имеет границы.

Цикл z_r – это такая цепь C_r, что $\partial C_r = 0$ (замкнутая цепь), т. е. она не имеет границы. Циклы z_r образуют группу, которую обозначим $Z_r(K,G)$. Заметим, что, в частности, граница каждого симплекса является циклом, а обратное неверно.

В n-мерном комплексе K цикл z_r размерности r $(r = 0,1,...,n-1)$ называется гомологичным нулю (или ограничивающим), если он является границей некоторой (r+1)-мерной цепи в K, т. е. $z_r = \partial C_{r+1}$. Тогда пишут $z_r \sim 0$. Множество всех r-мерных циклов в K, гомологичных нулю, обозначим через $B_r(K,G)$. Оно является

подгруппой группы $Z_r(K,G)$ всех циклов. Два r-мерных цикла z_1 и z_2 называются гомологичными между собой, если их разность гомологична нулю, т. е. $z_1 - z_2 = \partial C_{r+1}$. Тогда пишут $z_1 \sim z_2$.

Факторгруппа группы $Z_r(K,G)$ всех циклов комплекса K по подгруппе $B_r(K,G)$ циклов, гомологичных нулю (ограничивающих), называется группой гомологий комплекса K относительно группы G коэффициентов и обозначается $H_r(K,G)$, т. е.

$$H_r(K,G) = Z_r(K,G) / B_r(K,G).$$

Пуанкаре назвал группы гомологий комплекса «группами Бетти», а ранги этих групп – «числами Бетти» p_m по имени итальянского математика, о котором мы упоминали выше.

Вместо комплексов (симплициальных многогранников в $\mathbb{R}^m$) рассматривают также «клеточные разбиение» различных многообразий (например сфер S^n ($n \geq 2$) в $\mathbb{R}^{m+1}$) и аналогично строят для них группы гомологий. Группы гомологий, как и фундаментальная группа, являются инвариантами при топологических отображениях, т. е. при гомеоморфизмах – взаимно однозначных и взаимно непрерывных отображениях.

Выше на стр. 9 мы писали, что швейцарский математик Л. Шлефли, изучая n-мерные многогранники при $n > 3$, обобщил эйлерову характеристику многогранника на n-мерный случай, получив формулу

$$\chi = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k = 1 - (-1)^n,$$

где α_k – число k-мерных граней n-мерного многогранника. Пуанкаре обобщил эйлерову характеристику на случай конечного клеточного комплекса K, получив формулу

$$\chi(K) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \alpha_k = \sum_{k \geq 0} (-1)^k p_k,$$

где α_k – число k-мерных клеток комплекса K, а p_k – k-мерное число Бетти комплекса K (формула Эйлера–Пуанкаре). Эйлерова характеристика многогранника и комплекса является топологическим инвариантом. Она допускает обобщения на случай компактных многообразий [197, т. 5, с. 936–937].

В 1904 г. Пуанкаре выдвинул гипотезу: всякое односвязное компактное трехмерное многообразие без края гомеоморфно трехмерной сфере S^3. Многие десятилетия ее пытались доказать не только для $n=3$. Эти попытки привели к существенному продвижению в топологии многообразий. Для $n=2$ она справедлива. При $n \geq 5$ гипотезу Пуанкаре (обобщенную) в начале 60–70-х годов почти одновременно и разными методами доказали Смейл и Столлингс. Доказательство для более трудного случая $n=4$ дал в 1982 г. Фридман. Но доказать гипотезу Пуанкаре в предложенном им случае $n=3$ математикам не удавалось.

В 1997 г. в США (в Кембридже, штат Массачусетс) на пожертвование супругов Клэев был основан Математический институт Клэя. Группа авторитетных математиков, собравшаяся в Париже в мае 2000 г., выделила семь наиболее важных нерешенных математических проблем («проблем тысячелетия»), а Институт Клэя назначил за решение каждой из них премию в размере одного миллиона долларов («премия тысячелетия»). В число этих проблем вошла гипотеза Римана (до сих пор не доказанная, о ней мы писали выше в очерке о Римане), а также гипотеза Пуанкаре.

Математик из Санкт-Петербурга Г. Я. Перельман в статье 2002 г. и двух статьях 2003 г., помещенных в Интернете, привел полученное им доказательство гипотезы Пуанкаре (для $n=3$) и более общей гипотезы Терстона. Это явилось сенсацией в математическом мире.

Григорий Яковлевич Перельман родился в 1966 г. в Ленинграде в еврейской семье. Отец работал инженером-электриком, а мать – учительницей математики в ПТУ. Григорий учился только на «отлично», побеждал на многих математических олимпиадах, в том числе получил золотую медаль на Международной математической олимпиаде в Будапеште. Он окончил физико-математическую школу в Ленинграде, а затем матмех ЛГУ и поступил в аспирантуру при ЛОМИ (Ленинградское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН), с 1992 г. это ПОМИ (название отделения Ленинградское изменилось на Петербургское). В 1990 г. защитил кандидатскую диссертацию под руководством знаменитого геометра А. Д. Александрова и остался работать в ЛОМИ. В 1993 г. отец Григория эмигрировал в Израиль, а Григорий с матерью и младшей сестрой остался в Санкт-Петербурге. В начале 90-х годов Г. Я. Перельман приехал в США и работал там научным сотрудником в разных университетах. В 1996 г. вернулся в

Санкт-Петербург и продолжил работу в ПОМИ. В 1996 г. ему была присуждена премия Европейского математического общества для молодых математиков, но он отказался ее получать.

После доказательства гипотезы Пуанкаре Г. Я. Перельман не стал писать докторскую диссертацию, не желая публиковать свои результаты в научных журналах и выполнять многочисленные формальности, связанные с защитой. В 2005 г. ушел из ПОМИ, где работал ведущим научным сотрудником.

В 2004–2005 гг. три независимых группы математиков проверяли доказательство Перельмана гипотезы Пуанкаре и признали его правильным. В 2006 г. Перельману за доказательство гипотезы Пуанкаре присуждена международная премия «Медаль Филдса», которая в математике считается равносильной Нобелевской премии. Но он отказался от нее, мотивируя тем, что присуждение ему этой премии несправедливо, так как вклад американского математика Ричарда Гамильтона в решение этой проблемы «ничуть не меньше, чем мой». Однако Гамильтон не смог довести решение до конца.

Перельман стал жить затворником, мало с кем общается, объявил, что покончил заниматься научными исследованиями, ведет аскетический образ жизни.

В 2010 г. Математический институт Клэя присудил Григорию Перельману за доказательство гипотезы Пуанкаре, премию в один миллион долларов, но он от нее отказался. Этот отказ явился мировой сенсацией. В 2011 г. стало известно, что Перельман отказался от предложения стать действительным членом Российской академии наук. Институт Клэя передал премию Перельмана в один миллион долларов Физико-математическому институту им. А. Пуанкаре в Париже для финансирования молодых ученых, которые проходят там научные стажировки. В последние годы Перельман время от времени выезжает по приглашению западноевропейских математиков читать для них лекции в университетах.

Скажем несколько слов об идее доказательства Перельманом гипотезы Пуанкаре. Это так называемый «поток Риччи с хирургией». Потоком Риччи называется некоторое дифференциальное уравнение в частных производных. Он позволяет деформировать риманову метрику на многообразии, но при этом могут возникать «сингулярности» – точки, где кривизна бесконечна, и продолжить деформацию невозможно. Нужно было провести классификацию сингулярностей.

При подходе к ним поток Риччи останавливают и производят «хирургию» – вырезают малую часть многообразия и заклеивают вырезы шарами так, что метрика полученного многообразия становится достаточно гладкой. Далее разрезания производятся уже с этим многообразием без сингулярностей так, что в результате этого процесса многообразие становится связной суммой набора сфер, т. е. сферой.

Мы привели многие из результатов А. Пуанкаре в математике. На самом деле их много больше, но рамки нашей книги не позволяют привести еще целый ряд из них, приведенных, например, в [197, т. 4, с. 744–754].

4. Вклад Пуанкаре в небесную механику.

Выше в пункте 2 отмечалось, что Пуанкаре начал заниматься вопросами небесной механики немного ранее 1885 г., когда опубликовал несколько статей по проблемам равновесия жидких расплавленных вращающихся тел. Эта проблема, как и многие другие проблемы небесной механики, по существу, выходит за рамки нашей книги, поэтому из них мы лишь остановимся на некоторых вопросах, связанных с математическим анализом и теорией обыкновенных дифференциальных уравнений.

Выше в пункте 2 сообщалось, что с 1896 г. и до конца жизни Пуанкаре заведовал кафедрой небесной механики Парижского университета. До этого он уже в 1889 г. за работу «О проблеме трех тел» получил премию на конкурсе, объявленном шведским королем Оскаром II. В 1892 г. вышел первый том «Новых методов небесной механики» Пуанкаре, в 1893 г. – второй том, а третий – в 1899 г.

По небесной механике до этой трехтомной монографии Пуанкаре наиболее обстоятельными были: пятитомный труд П. Лапласа «Трактат по небесной механике» (1798–1825), и одноименный четырехтомный труд французского астронома Ф. Тиссерана, вышедший в 1889–1896 гг. Эти труды носят энциклопедический характер, но многие методы и вопросы здесь требовали обновления и дополнения. Это восполняет монография Пуанкаре, написанная почти полностью по его собственным результатам. Тиссеран занимал кафедру астрономии Парижского университета, а после его смерти в 1896 г. ее занял Пуанкаре.

Уже в конкурсной работе «О проблеме трех тел» (1889) Пуанкаре, в частности, проанализировал некоторые математически необоснованные, а то и просто неверные методы, использованные некоторыми его предшественниками-

астрономами. Главным образом это касалось использования ими в вычислениях расходящихся тригонометрических рядов, причем те астрономы не подозревали, что использованные ими ряды расходятся. Первые члены этих рядов в общем-то давали удовлетворительные результаты. Обнаруженная Пуанкаре расходимость нескольких таких рядов вызвала настоящее замешательство у астрономов. Исследования Пуанкаре расходящихся тригонометрических рядов и возможности их использования в астрономии Пуанкаре изложил во втором томе своих «Новых методов небесной механики». Он показал также возможность использования расходящихся рядов для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. До исследований Пуанкаре расходящиеся ряды считались почти бесполезными, а после исследований Пуанкаре интерес к таким рядам сильно возрос. В 1898 г. Парижская АН даже объявила конкурс на тему «Исследование возрастающей роли расходящихся рядов в анализе».

Пуанкаре много внимание уделял исследованиям периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений, применяемым в небесной механике. В первом томе его труда им посвящено две главы. Здесь Пуанкаре разработал и метод малого параметра, который заключается в следующем. Рассматриваются системы вида

$$\frac{dx}{dt} = X(x,t) + \mu R(x,t),$$

где μ – малый параметр. При $\mu = 0$ система называется «порожающей». Ставится вопрос: если «порождающая» система обладает каким-нибудь свойством (например, имеет периодические решения или устойчива), то будет ли обладать этим свойством исходная система с малым параметром. Ответ может дать метод малого параметра. Этим методом Пуанкаре в ряде случаев доказал не только существование периодических решений системы с малым параметром, но указал и алгоритмы для их построения. В дальнейшем этот метод широко применялся многими математиками (Н. М. Крыловым, Н. Н. Боголюбовым и др.) в теории нелинейных колебаний [197, т. 2, с. 948–950], [297, гл. 3, §2–3].

Бóльшую часть третьего тома своего труда Пуанкаре посвятил проблеме устойчивости движения небесных тел. Он рассматривает устойчивость, в основном, по первому приближению. А. М. Ляпунов создал намного более полную теорию устойчивости. При исследовании устойчивости Пуанкаре использует и качественную

теорию решения дифференциальных уравнений, в частности, применяет предельные циклы. В третьем томе Пуанкаре показывает, что если движение планеты описывается сходящимся тригонометрическим рядом, то это еще не означает устойчивости ее движения.

5. Вклад Пуанкаре в специальную теорию относительности.

Теория относительности изучает общие пространственно-временные свойства движения тел – кинематические (без учета действия на тела сил) и динамические (с учетом их действия). Но, в отличие от классической ньютоновской механики, она изучает их с более общей точки зрения. Классическая механика получается отсюда при $\frac{v}{c} \to 0$, где v – скорость движения тела, а c – скорость света. Теория относительности подразделяется на специальную теорию относительности (СТО) и общую теорию относительности (ОТО). СТО, в отличие от ОТО, изучает движение тел без учета гравитации (тяготения).

В пункте 2 мы кратко касались вопроса о возникновении специальной теории относительности. Пуанкаре до Эйнштейна начал разрабатывать СТО. Уже в 1895 г. в работе «К теории Лармора» он дает первую формулировку принципа относительности. В работе «Измерение времени» (1998), включенной затем в качестве раздела в его книгу «Наука и гипотеза» (1902), Пуанкаре детально показывает, что невозможно говорить об одновременности событий в пространстве при больших расстояниях. В результате он приходит к выводу об относительности пространства и времени. Известно, что Эйнштейн со своими друзьями с увлечением читал книгу Пуанкаре «Наука и гипотеза», куда вошла и статья «Измерение времени» [266, с. 132]. Вопросов, связанных с относительностью, Пуанкаре касался и в своих докладах на Международных физических конгрессах в 1900 и 1904 гг., о чем Эйнштейн, по-видимому, знал. Но здесь еще нет математического аппарата СТО. В докладе 1904 г. на физическом конгрессе (он проходил в Сент-Луисе в США) Пуанкаре (до Эйнштейна) выдвинул «постулат относительности»: «Законы физических явлений будут одинаковыми как для покоящегося наблюдателя, так и для наблюдателя, находящегося в состоянии равномерного поступательного движения, так что мы не имеем и не можем иметь никаких средств, чтобы различить, находимся ли мы в таком движении или нет». В этом же докладе Пуанкаре сказал, что на этой

основе возникнет новая механика, в которой никакая скорость не сможет превзойти скорость света.

5 июня 1905 г. в *Comptes redus* вышла статья Пуанкаре «О динамике электрона» с кратким изложением математического аппарата СТО. Подробную статью с тем же названием он отослал в малоизвестный итальянский математический журнал, где она была напечатана в январе 1906 г. Молодой эксперт патентного бюро в Берне (Швейцария) **Альберт Эйнштейн (1879–1955)** в конце июня 1905 г. закончил писать статью «К электродинамике движущихся тел» с изложением СТО, отослал ее в хорошо известный журнал *Annalen der Physik*, и она была там опубликована в конце 1905 г. Многие математики, не говоря уж о физиках, не знают, что Пуанкаре принадлежит приоритет в создании математических основ СТО. Кратко остановимся на содержании указанных работ Пуанкаре и Эйнштейна.

В классической механике переход от одной инерциальной, т. е. движущейся прямолинейно и равномерно, системы координат (системы отсчета) получается с помощью преобразований Галилея

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \tag{1}$$

где v – скорость движения системы вдоль оси Ox, а t – время движения системы. В СТО переход вдоль оси Ox от системы отсчета с координатами x, y, z в момент времени t к системе с координатами x', y', z' в момент времени t' осуществляется преобразованиями Лоренца

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{2}$$

где c – скорость света. Нидерландский физик **Хендрик Лоренц (1853–1928)** ввел их, хотя и не точно, в 1895 г. и уточнил в 1899 и 1904 гг., когда еще не была создана СТО. Он показал, что уравнения Максвелла–Лоренца электромагнитного поля не меняются при этих преобразованиях. Английский физик **Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879)** в 60-х гг. XIX в. разработал теорию электромагнитного поля и опубликовал её в 1873 г. В 1898 г. преобразования (2) независимо от Лоренца получил английский физик Лармор и опубликовал в 1900 г. [266, §6.2].

Пуанкаре показал, что преобразования Лоренца (2) образуют группу, которую он назвал «группой Лоренца», хотя Лоренц не говорил о группе. Обратное

преобразование тоже является преобразованием Лоренца, но с изменением знака скорости v. В этом можно убедиться, выразив из (2) x, y, z, t через x', y', z', t'. Групповая операция заключается в последовательном выполнении двух преобразований Лоренца со скоростями движения, соответственно, v_1 и v_2. В результате получается преобразование Лоренца со скоростью $v = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}}$ (формула сложения скоростей). Действительно, обозначим

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \alpha_i = \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}, \quad i = 1, 2.$$

Выражение $\dfrac{1}{\alpha_1}(x - v_1 t)$ при повторном применении преобразования Лоренца принимает вид

$$\frac{1}{\alpha_1}\left(\frac{x - v_2 t}{\alpha_2} - v_1 \frac{t - \dfrac{v_2 x}{c^2}}{\alpha_2}\right) = \frac{x - vt}{\alpha}.$$

Сравнивая коэффициенты при x и t, находим, что

$$\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}\left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) = \frac{1}{\alpha}, \qquad \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}\left(v_2 + v_1\right) = \frac{v}{\alpha}.$$

Отсюда, разделив второе из этих равенств на первое, получаем формулу сложения скоростей. В отличие от Пуанкаре, Энштейн не говорит о группе преобразований.

В статье 1906 г. Пуанкаре первым (до Минковского) присоединил к пространственным координатам x, y, z временну́ю чисто мнимую координату ict, где c – скорость света, положив таким образом начало рассмотрению единого объекта, получившего вскоре название «пространство-время». Пуанкаре фактически ввел в СТО четырехмерное псевдоевклидово пространство, характеризуемое квадратичной формой

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2, \tag{3}$$

инвариантной относительно преобразований Лоренца. (В инвариантности здесь легко убедиться, подставив в форму $x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2$ выражения для x', y', z', t' из формул (2).) Введя угол ψ равенством $\operatorname{th}\psi = \dfrac{v}{c}$, Пункаре получает

$$x' = x\operatorname{ch}\psi - ct\operatorname{sh}\psi ,$$

$$ct' = -x\operatorname{sh}\psi + ct\operatorname{ch}\psi ,$$

где x' и t' – выражения в (2). Он трактует преобразования Лоренца (2) как поворот системы координат в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве. Эйнштейн в своей работе не вводил четвертой координаты ict. Поэтому у Пуанкаре математический аппарат СТО является более полным, чем у Эйнштейна. У них разный подход к преобразованиям (2) Лоренца. У Пуанкаре они являются инвариантом уравнений Максвелла и сохраняют в качестве инвариантности квадратичную форму (3). Эйнштейн, как мы увидим ниже, получает преобразования (2), не ссылаясь на Лоренца и уравнения Максвелла, а из кинематических соображений о распространении фронта световой волны. Таким образом, СТО у Пуанкаре не является вполне систематеской физической теорией, поскольку она напрямую зависит у него от уравнений Максвела. Но несомненно, что Пуанкаре несколько раньше, чем Эйнштейн, разработал математический аппарат СТО и раньше опубликовал в краткой статье 5 июня 1905 г.

Между прочим, знаменитую формулу $E = mc^2$, открытие которой связывают обычно только с Эйнштейном, впервые опубликовал Пуанкаре в работе 1900 г., но только для лучистой энергии. Эйнштейн ссылается в работе 1906 г. на эту работу Пуанкаре и доказывает формулу $E = mc^2$ для любых видов энергии [151, с. 401].

А. Эйнштейн в указанной выше работе 1905 г. строит СТО на основе двух постулатов (принципов):

1. Постулат относительности: все законы физики имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета (т. е. движущихся прямолинейно и равномерно);

2. Постулат о постоянстве скорости света: в любой инерциальной системе отсчета скорость света одинакова независимо от скорости движения источника.

Эйнштейн не обосновывает эти постулаты. Но ясно, что второй постулат следует из опыта Майкельсона–Морли (80-е гг. XIX в.), в котором показано, что скорость света не зависит от движения источника.

В начале работы Эйнштейн рассматривает кинематику в СТО, а затем переходит к электродинамике. Поскольку понятие одновременности в удаленных друг от друга системах отсчета относительно, Эйнштейн уделяет внимание синхронизации часов в разных системах отсчета с помощью световой вспышки.

Эйнштейн, как и Пуанкаре, использует преобразования (2), но не связывает их с Лоренцем и уравнениями Максвелла, так как выводит их по-другому следующим образом. Рассмотрим две инерциальные системы отсчета (x, y, z, t) и (x', y', z', t'), причем вторая движется относительно первой в направлении оси Ox со скоростью v. В момент $t = t' = 0$ системы совмещены. В тот же момент из их общего начала координат испускается сферическая световая волна. В момент t фронт этой волны описывается в первой системе уравнением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$, а во второй – уравнением $x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$ (учитывая второй постулат). Таким образом, преобразования перехода от (x, y, z, t) к (x', y', z', t') должны сохранять квадратичную форму $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2$. Эйнштейн ищет эти преобразования в виде

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}).$$

Используя свойство инвариантности указанной выше квадратичной формы, он находит, что $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Таким образом, Эйнштейн получает преобразования Лоренца (2), не ссылаясь на Лоренца. Заметим, что Эйнштейн впервые узнал о преобразованиях Лоренца для x', t' через x и t, когда Лоренц привел их в неполном виде, а именно в виде $x' = x - vt$, $t' = t - \frac{vx}{c^2}$. Но он не знал, что в 1899 г. Лоренц получил их в виде (2) с точностью до постоянного множителя. [266, с. 122–123]. Последовательным применением этих преобразований Эйнштейн получает и формулу сложения скоростей.

В СТО имеют место эффекты: сокращение предметов в направлении их движения и замедление времени при движении. Рассмотрим две системы отсчета: K с координатами x, y, z, t и K' с координатами x', y', z', t'. Пусть система K покоится, а K' движется поступательно и равномерно со скоростью v вдоль оси абсцисс. Пусть в K и K' в момент их совмещения имеется по равному твердому стержню AB, расположенному на оси абсцисс. При движении систем стержни будут иметь, соответственно, длину $l = x_B - x_A$ в системе K и $l' = x'_B - x'_A$ в системе K'. Из обращения преобразований Лоренца (2) получаем:

$$l = x_B - x_A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left((x'_B + vt') - (x'_A + vt')\right) = \frac{l'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

откуда $l' = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, следовательно, $l' < l$. Аналогично получается и формула $t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Таким образом, наблюдатель в покоящейся системе K видит, что в движущейся системе K' происходит сокращение предметов и замедление времени. Но наблюдатель в системе K', для которого она покоится, не заметит для своих предметов и времени никакого изменения, а в системе K, которую он видит движущейся, он заметит сокращение предметов и замедление времени. Получается парадоксальная ситуация. Эйнштейн считал эти эффекты кажущимися, а Пуанкаре считал, что в движущейся системе они происходят в действительности. Еще до создания СТО об эффекте сокращения предметов при движении говорили Фитцджеральд, Лоренц, Лармор и другие физики. Они связывали этот факт с сопротивлением эфира – однородной среды, равномерно и неподвижно распределенный в пространстве. Эйнштейн решительно отбрасывает понятие эфира как лишнее в физике, а Пуанкаре еще не решается его отбросить. Для Пуанкаре, в отличие от Эйнштейна, СТО не была безусловным отражением физической реальности. Согласно своей философской концепции конвенционализма, Пуанкаре считал ее факты не окончательно установленными, а удобными соглашениями. Пуанкаре считает, что теория относительности еще требует дальнейшего экспериментального подтверждения. Для этого в работе 1906 г. он выдвинул предложение о необходимости создания теории относительности с учетом гравитации (т. е. о создании ОТО) и проверке ее правильности на эффекте смещения перигелия Меркурия.

Исследование свойств четырехмерного псевдоевклидова пространства-времени продолжил немецкий математик **Герман Минковский (1864–1909)**, крупный специалист в области геометрической теории чисел (см., например, [266, с. 148]). В последние годы жизни он был профессором Политехнического университета в Цюрихе (1896–1902), в котором в 1897–1900 гг. учился Эйнштейн. С 1902 г. Минковский – профессор Гёттингенского университета. В 1907 г. он вводит четвертую (временну́ю) координату ict (по-видимому, не зная, что ее ввел в 1906 г.

Пуанкаре). В работе «Пространство и время» (1909) Минковский вводит в четырехмерное пространство-время метрику в виде

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (cdt)^2$$

и вводит геометрическую модель так называемого «светового конуса» в СТО. Долгое время четырехмерное пространство-время называли «пространством Минковского», хотя оно было введено Пуанкаре [51, с. 372].

Общую теорию относительности (ОТО), учитывающую гравитацию, разработали Альберт Эйнштейн и немецкий математик Марсель Гроссман в их совместной монографии «Основы общей теории относительности» (1916). Идеи и физическая сторона теории принадлежат Эйнштейну, а математическая разработка – Гроссману, который лучше Эйнштейна разбирался в тензорном анализе. В разработке ОТО принял участие и Д. Гильберт. Эйнштейн проверил правильность ОТО на эффекте смещения перигелия Меркурия. Во время полного солнечного затмения в 1919 г. группа английских астрономов измерила отклонение лучей от звезд, находившихся вблизи солнечного диска, и это подтвердило соответствующие вычисления, проведенные Эйнштейном с помощью ОТО. Это было триумфом теории относительности. Об Эйнштейне писала мировая пресса, в частности крупные газеты в Англии и США. Он сам выступал с лекциями по теории относительности во многих странах Европы, Америки и в Японии.

Поскольку Эйнштейн нигде не сослался на Пуанкаре как об одном из создателей СТО, а физики не заметили работ Пуанкаре по СТО, то о вкладе Пуанкаре в создании СТО несколько десятилетий не писали. Создался миф об Эйнштейне как единоличном создателе теории относительности. До недавнего времени этот миф был очень распространенным. Так, в книге В. Е. Львова «Жизнь Альберта Эйнштейна» (М.: Мол. гвардия, 1959. – 342 с.) из серии «ЖЗЛ» о Пуанкаре не упоминается. Более того, в учебном пособии Г. Г. Кордуна «Історія фізики» (К.: Вища школа, 1993. – 280 с. – 3-е изд.) о Пуанкаре тоже не упоминается. Но, например, в пособии Б. И. Спасского «История физики. Ч. 2» (М: 1964) отражен вклад А. Пуанкаре в создание СТО. В 1973 г. на русском языке был издан новый сборник «Принцип относительности», отличающийся от всех предыдущих, в котором наиболее полно представлены работы по СТО, а также приведены мнения многих ученых об истории ее создания. Подробно рассмотрен вклад Пуанкаре в создание СТО в книге А. Пайса

[266], хотя ее автор, будучи лично знаком с Эйнштейном, оценивает вклад Пуанкаре в СТО довольно сдержанно. Детальная и объективная научная оценка вклада Пуанкаре в создание СТО приведена в Послесловии к книге [151], которую мы широко использовали при написании этого очерка.

В разработке ОТО Пуанкаре не принимал участия, он только высказал пожелание о необходимости ее создания. Сведения об ОТО выходят за рамки нашей книги. Отметим только, что математический аппарат ОТО основан на римановой геометрии и тензорном анализе. В ОТО квадрат элемента длины в тензорной записи имеет вид

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad g_{ij} = g_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

где g_{ij} – тензор гравитации. Как упоминалось выше на с. 39, тензорное исчисление было создано в 1884–1901 гг. итальянским математиком Риччи-Курбастро (кратко пишут: Риччи) и его учеником Леви-Чивитой. Эйнштейн предложил не писать знака суммы, когда производится суммирование по двум повторяющимся индексам – нижнему (он называется ковариантным) и верхнему (контравариантному).

О Пуанкаре: [151; 108, с. 240–247, с. 102; 297; 197, т. 4, с. 744–754; 296; 264; 265; 266; 152; 295; 140, с. 414–421; 271; 290, с. 340–342; 8; 13–17; 179].

Предыстория математической логики, ее возникновение и развитие в XIX в.

Первое систематическое построение логики, которую обычно называют формальной или традиционной, в отличие от математической, дал Аристотель в IV в. до н. э. в своих сочинениях по логике, объединенных его комментаторами под общим названием «Органон». Главным из его логических сочинений являются «Аналитики: первая и вторая» (они переведены и на русский язык). Об их содержании кратко говорилось в нашем пособии [243] на с. 39. Некоторое дальнейшее развитие формальная логика получает в X–XIII вв. у арабских комментаторов Аристотеля (ал-Фараби, Ибн Сина, Ибн Рушд, ат-Туси). В Западной Европе в XII–XIV вв. философы-богословы в своих рассуждениях философско-религиозного содержания (схоластике) проявляли, в частности, интерес к формальной логике. В то время оформляется и так называемая «новая логика» как формальная дисциплина о принципах всякого знания

(П. Абеляр, Дунс Скотт, У. Оккам и др.). У ее представителей уже встречаются некоторые законы логики высказываний (например законы де Моргана, сформулировавшего их заново в XIX в.). Испанский философ и богослов Р. Луллий (ок. 1235 – ок. 1315) в своем сочинении «Великое искусство» высказал идею логической машины, он даже сделал попытку ее реализации.

В связи с развитием алгебры, достигнутым благодаря удачной алгебраической символике Декарта, с XVII в. появились попытки символических записей для выражения логических операций. Такую попытку сделал немецкий математик И. Юнг (1587–1657). Г. В. Лейбниц (1646–1716) поставил вопрос очень широко, выдвинув идею формализации языка и мышления. Он представлял свою «универсальную характеристику» как символический язык, способный четко выражать человеческие мысли, так что «химеры, которые не понимает даже тот, кто их создает, не смогут быть записаны его знаками». Согласно Лейбницу, для создания такого языка нужно сначала составить перечень неопределяемых понятий, которые будут представлять собой «алфавит человеческих мыслей». Из них все остальные понятия могут быть получены путем комбинирования. Нужно ввести подходящую символику для исходных и составных понятий и указать правила вывода высказываний. Лейбниц рассматривал логику не только как орудие доказательства, но и как искусство изобретения. Согласно Лейбницу, логическая машина могла бы получать все теоремы, а споры можно было бы разрешать путем вычислений: противники сядут и скажут: «Посчитаем!».

Лейбниц несколько раз пытался реализовать свою идею построения символической логики. В частности, он употребляет обозначение AB для конъюнкции понятий A и B, замечает закон идемпотентности $AA = A$, а также то, что высказывание «всякое A есть B» можно записать в виде равенства $A = AB$. Он также говорит о «пустом множестве». Отрицание понятия A Лейбниц обозначает nonA. Для изображения логических связей между понятиями (например, все S суть P; никакое S не суть P) Лейбниц использует и геометрические схемы (в одной из них он обозначает понятия отрезками параллельных прямых, в другой – кругами). В XVIII в. идеи символической логики продолжал разрабатывать немецкий математик, швейцарец по происхождению И. Г. Ламберт в «Новом Органоне» (1754). Развитие логики в конце XVIII в. и почти до середины XIX в. сдерживалось авторитетами

философов Канта и Гегеля, считавших, что формальная логика не нуждается в усовершенствовании. Отдельные элементы символической логики содержатся в четырехтомном труде «Наукоучение» Б. Больцано, написанном в 1820–1829 гг. и опубликованном в 1837 г.

Становление математической логики как науки было осуществлено в работах британских математиков около середины XIX в. Существенный вклад здесь внес шотландский математик **Огастес (Августус) де Морган (1806–1871)**. Он родился в Индии в семье полковника английских войск, окончил Кембриджский университет. В 1828–1831 и 1836–1866 гг. был профессором математики Лондонского университетского колледжа. Де Морган – основатель и первый президент Лондонского математического общества (с 1865 г.). Его работы посвящены основам алгебры и арифметики, математическому анализу (теория рядов) и математической логике. Лондонское математическое общество учредило медаль его имени. Именем де Моргана назван кратер на видимой стороне Луны.

Важным шагом в возникновении математической логики явилась работа де Моргана «Формальная логика или исчисление необходимых и вероятных заключений» (1847). Это первое систематическое изложение формальной логики на языке символов.

Поскольку понятие «не-X» (отрицание X) есть нечто неопределенное (это все, что угодно, кроме X), де Морган для устранения этой неопределенности вводит понятие «целого» (или «универсума»), выбираемого в зависимости от предмета исследования. Он обозначает понятие «не-X» буквой x. Вместо пары традиционных в формальной логике терминов X и Y (субъект X и предикат Y) он рассматривает четыре пары: X,Y; x,y; X,y; x,Y. В формальной логике используются четыре простых суждения, традиционно обозначаемые гласными буквами, о парах терминов:

A (общеутвердительное суждение): все X суть (являются) Y;

E (общеотрицательное суждение): никакой X не суть Y;

I (частноутвердительное суждение): некоторые X суть Y;

O (частноотрицательное суждение): некоторые X не суть Y;

Де Морган дает этим четырем суждениям и свои обозначения соответственно: $X)Y$, $X.Y$, XY, $X:Y$. Кроме этих четырех простых суждений де Морган рассматривает еще 4 простых суждения A', E', I', O', которые получаются заменой

X его отрицанием x, а Y – отрицанием y, в его других обозначениях: $x)y$, $x.y$, xy, $x:y$. Термины и их отрицания де Морган комбинирует с суждениях и устанавливает ряд равносильностей, например $X)Y = X.y$ и т. п. Используя знак $+$ для конъюнкции, он строит составные предложения, например $A + A'$, что в нашей символике означает $X = Y$, а предложения $A + O'$, $A' + O$, $E + E'$ означают соответственно $X \subset Y$, $X \supset Y$, $X = y$. Эти и другие суждения и отношения являются исходными для построения де Морганом теории силлогизмов – дедуктивных логических умозаключений. В этой теории он вводит также составные термины: PQ означает, что «есть сразу P и Q», т. е. наше $P \cap Q$, а $P * Q$ у него означает, что «есть P или Q, или P и Q сразу», т. е. наше $P \cup Q$. Буквой U он обозначает универсум, а буквой u – его отрицание, т. е. пустое множество, устанавливает свойства: $XU = X$; $Xu = u$, $X * U = U$, $X * u = X$. Кроме того, де Морган формулирует законы, которые носят его имя, в виде: отрицание PQ есть $p * q$; отрицание $P * Q$ есть pq. Он устанавливает и свойство дистрибутивности в виде $(P * Q)(R * S) = PR * PS * QR * QS$. В символическом изложении формальной логики у де Моргана уже содержится система, названная позже «алгеброй Буля», но ее заслоняли многочисленные детали изложения. Работа де Моргана, перенасыщенная обилием суждений для терминов X, Y и отрицаний x, y этих терминов, а также непривычными обозначениями, оказалась трудной для ее восприятия современниками. Этих сложностей удалось избежать его современнику Дж. Булю, который более просто построил «алгебру логики» в форме «исчисления классов», равносильного в отношении операций нынешней «алгебре множеств».

Основоположником математической логики является английский математик **Джордж Буль (1815–1864)**. Он родился в г. Линкольн в Ирландии в семье сапожного мастера, окончил только начальную школу, так как на продолжение учебы не было средств. Буль работает учителем в предместье Лондона и дальнейшие знания приобретает самостоятельно: изучил «Математические начала» Ньютона, «Аналитическую механику» Лагранжа, а также несколько языков. В 1849 г. получает должность профессора математики в колледже г. Корк в Ирландии. Первые работы Буля относятся к области анализа, за них его наградили Королевской медалью в Лондоне. Затем он начинает разрабатывать математическую логику, подружившись с

шотландским математиком и логиком Огастесом де Морганом. Буль изложил основы математической логики в работах «Математический анализ логики» (1847), «Логическое исчисление» (1848) и «Исследование законов мышления» (1854). В этих своих работах он привел так называемую алгебру Буля в форме алгебраического исчисления классов, установив алгебраические правила действий над высказываниями в логике, равносильные правилам действий над множествами. Буль одним из первых четко отметил абстрактный характер алгебраических операций в математике и указал на важность их исследования независимо от конкретного содержания объектов, к которым они применяются . До своих занятий символической логикой и после он уделял внимание разработке символических, или операторных, методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и даже попытался применить эти методы к уравнениям с переменными коэффициентами. Символическому методу посвящены две главы его «Трактата по дифференциальным уравнениям» (1859). Именем Дж. Буля назван кратер краевой зоны Луны. Отметим еще, что одна из пяти дочерей Буля, Этель-Лилиан в замужестве Войнич, написала известный роман «Овод», а другая, Люси, была первой женщиной-профессором химии в Лондоне.

В основе как традиционной (формальной) логики, так и математической, лежит понятие высказывания (суждения). Так называют утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно (т. е. приписать ему одно из двух значений – «истина» или «ложь»). Из простых высказываний с помощью логических операций, называемых логическими связками («не», «и», «или», «если… то»), получаются сложные высказывания, об истинности или ложности которых можно судить, используя таблицы истинности для логических операций.

Буль первым осознал абстрактный характер логического исчисления в том смысле, что операции над высказываниями обладают теми же свойствами, что и операции над «классами» объектов (т. е. над множествами объектов произвольной природы; термин «множество» ввел Г. Кантор в 1895 г.). Буль строит свое логическое исчисление, позже названное алгеброй Буля, в форме исчисления классов следующим образом. Через x, y, z Буль обозначает классы объектов, универсальный класс обозначает символом 1, а пустой класс – символом 0. Он вводит операции $x+y$, xy, $1-x$, которые соответствуют современным операциям объединения, пересечения и

дополнения для множеств с тем лишь различием, что он вводит операцию сложения (объединения) классов, исключая их общие элементы. (Современное определение объединения использовал де Морган, с 1863 г. – Джевонс, а затем оно стало общепринятым.) Отношение включения $x \subset y$ Буль вводит равенством $xy = x$, разность $x - y$ состоит из тех и только тех элементов класса x, которые не являются элементами класса y. Он приводит следующие свойства операций: $x + y = y + x$, $xy = yx$, $xx = x$, $x(y + z) = xy + xz$, закон противоречия: $x(1 - x) = 0$, закон исключенного третьего: $x + (1 - x) = 1$.

Если x и y – высказывания, то запись $x = 1$ у Буля означает, что высказывание x истинно, а $x = 0$ – что x ложно, $x + y$ означает дизъюнкцию высказываний, xy – конъюнкцию, $1 - x$ означает отрицание высказывания x. Мысль сопоставлять логическим символам значения 0 и 1 (вместо «ложь» и «истина») возникла у Буля в связи с равенством $x(1 - x) = 0$, которое имеет корни 0 и 1, если рассматривать его как алгебраическое уравнение.

Функцию, содержащую символы классов $x, y, \ldots$, Буль называет «логической функцией». Аналогично вводится и термин «логическое уравнение». Входящие в них переменные принимают лишь значения 0 или 1. Функцию $f(x) = ax + b(1 - x)$ можно записать в виде $f(x) = f(1)x + f(0)(1 - x)$. Аналогично можно получить разложение

$$f(x, y) = f(1,1)xy + f(1,0)x(1 - y) + f(0,1)(1 - x)y + f(0,0)(1 - x)(1 - y).$$

Множители x и $1 - x$ в разложении функции $f(x)$, а также множители xy, $x(1 - y)$, $(1 - x)y$, $(1 - x)(1 - y)$ в разложении $f(x, y)$ Буль называет конституэнтами разложения.

Буль решает логические уравнения формально, а затем интерпретирует полученный результат. Например, пусть требуется решить относительно x логическое уравнение $ax + b(1 - x) = 0$, где a и b не содержат x. Формально получается решение $x = b / (b - a)$. Положим $f(a, b) = b / (b - a)$ и разложим эту функцию по конституэнтам, используя приведенное выше разложение функции двух переменных, получим формально

$$f(a, b) = \frac{b}{b - a} = \frac{1}{0}ab + \frac{0}{-1}a(1 - b) + 1(1 - a)b + \frac{0}{0}(1 - a)(1 - b).$$

Равенство $ab = 0$ Буль называет необходимым и достаточным условием выполнения исходного уравнения. Если это условие выполнено, то $x = (1-a)b + \upsilon(1-a)(1-b)$, где υ – символ неопределенного класса.

Функции, аргументы которых, а также и сами функции, принимают значения из множества $\{0;1\}$, получили позже название булевых. Они играют важную роль не только в логике высказываний, но также в дискретной математике, в кибернетике. В XX в. они оказались удобным средством для построения дискретных управляющих систем таких как контактно-релейные схемы, логические сети в ЭВМ, роботах и др.

Английский экономист и философ-логик **Уильям Стенли Джевонс (1835–1882)**, ученик Дж. Буля, работал в Австралии, Манчестере и Лондоне. Его основные сочинения по логике: «Чистая логика» (1863), «Замещение подобных» (1869), «Основы науки» (1874). На множестве классов он рассматривает операции +, ·, –, а именно: $x + y$ означает у него объединение классов x и y уже в современном смысле (как множество объектов, принадлежащих либо x, либо y, либо им вместе), $x \cdot y$ – пересечение классов, $\overline{x}$ – дополнение класса x до универсума. Символ 0 обозначает пустой класс, а 1 – универсум. Разность $x - y$ специально не вводится, а заменяется пересечением $x\overline{y}$. Отношение включения $x \subset y$ вводится равенством $x = xy$. Джевонс приводит свойства операций, в том числе ассоциативность: $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$. Он использует законы: тождества $x = x$, противоречия $x\overline{x} = 0$, исключенного третьего $x + \overline{x} = 1$. Как видим, Джевонс использует алгебру логики Буля уже в современном виде, поскольку, в отличие от Буля, у Джевонса (как и ранее у де Моргана) используется современное понятие объединения.

Джевонс решал логические задачи вида: исходя из условий, связывающих заданные классы объектов, охарактеризовать какой-либо из этих классов или его дополнение до универсума.

Желая механизировать процесс решения подобного рода задач, Джевонс построил логическую машину (закончена в 1870 г.), которая решала такие задачи для четырех классов и их дополнений.

Английский логик **Джон Венн (1834–1923)** родился в семье священника, окончил в 1858 г. Кембриджский университет и стал священником, а с 1864 г.

преподавал в этом университете логику и мораль. Главной его работой по логике является «Символическая логика» (1894). Он первым ввел этот термин. Кроме логических уравнений, Венн рассматривает и логические неравенства. У него неравенство $x>0$ означает, что класс x не пуст, оно рассматривается как отрицание к $x=0$. Например, он находит, что необходимым и достаточным условием существования решения неравенства $ax+b\overline{x}+c>0$ относительно класса x, где a,b,c – тоже некоторые классы, является условие $a+b+c>0$ (знак + здесь означает дизъюнкцию). Он рассматривает также некоторые системы неравенств и уравнений, например систему $a\overline{d}+b\overline{e}+c>0$, $de+f=0$.

Кроме алгебраических методов в логике, Венн использует и диаграммы, которые теперь называют его именем (ранее сходные диаграммы встречаются у Лейбница и Эйлера). Они представляют собой овальные области, которые изображают классы в универсуме. Это дает разложение универсума и рассматриваемых классов на конституэнты. При увеличении числа n классов Венн для удобства вместо диаграмм использует таблицы из 2^n клеток – таблицы Венна.

Немецкий логик и алгебраист **Эрнест Шрёдер (1841–1902)** учился в Гейдельбергском и Кёнигсбергском университетах, был профессором Высшей технической школы в Цюрихе, а затем в Дармштадтском политехникуме и Высшей технической школе в Карлсруэ. Основные его работы посвящены алгебре логики, он ввел термин «исчисление высказываний». В первой из своих работ по логике Шрёдер сформулировал принцип двойственности: если в каком-либо логическом равенстве, образованном с помощью операций +, ·, –, взаимно заменить знаки дизъюнкции и конъюнкции, то получается тоже верное равенство. Например, двойственными друг другу являются равенства $x+y=y+x$ и $x\cdot y=y\cdot x$, равенства $\overline{x+y}=\overline{x}\cdot\overline{y}$ и $\overline{x\cdot y}=\overline{x}+\overline{y}$ и др. Свои исследования по логике он подытожил в трехтомнике «Лекции по алгебре логики» (1890–1905). Одной из главных задач алгебры логики Шрёдер считал решение логических уравнений и дал четкую теорию их решения. Но эта задача считалась главной лишь в XIX в., а уже с конца XIX в. главной задачей математической логики стало ее применение к обоснованию математики. Высказывания относительно объектов более чем одного класса Шрёдер называет отношениями и в третьем томе своих лекций дает обстоятельное изложение

исчисления отношений. Ему принадлежат первые попытки дать общее определение понятий «алгоритм» и «исчисление» и построить их теорию. Он разработал теорию квазигрупп, а одновременно с Ч. С. Пирсом строил теорию алгебраических структур (решеток). В 1890 г. Шрёдер ввел для понятий включения знаки $\subset$ и $\supset$, а для понятия «принадлежит» – знак, который он писал в виде $\ni$ вместо нынешнего $\in$.

В России впервые алгеброй логики занимался **Платон Сергеевич Порецкий (1846–1907)**. Он родился в семье военного врача в Елисаветграде (ныне г. Кропивницкий). В 1870 г. окончил физико-математический факультет Харьковского университета по специальности «астрономия». Работал в качестве астронома-наблюдателя и читал лекции по астрономии и математике в Казанском университете, в 1886 г. защитил докторскую диссертацию по астрономии. Он первым в России прочел курс математической логики. В 1881–1904 гг. выходит цикл его статей по алгебре логики, из них главной является большая работа «О способах решения логических равенств и об обратном методе математической логики» (1884).

Дальнейшее глубокое развитие математической логики осуществил немецкий математик и логик **Фридрих Людвиг Готлоб Фреге (1848–1925)**. Он родился в г. Висмар. Обучался сначала в Йенском, а затем в Гёттингенском университетах, с 1873 г. – профессор Йенского университета. Заслугой Фреге является то, что он поставил перед математической логикой цели, которые определили ее дальнейшее развитие, а вопрос о решении логических уравнений потерял свое значение. Он является одним из создателей современной математической логики. Именно с Фреге начинается построение математической логики как аксиоматической науки и ее применение к обоснованию самой математики. Он разрабатывает математическую логику, чтобы с ее помощью обосновать понятие натурального числа, которое при возросшем уровне строгости в математике оказалось неясным. Фреге писал: «Если некоторым мыслителям понятие натурального числа кажется элементарным и достаточно ясным, то это следствие того, что не учитывается необходимое условие всякого познания: знание о незнании».

Н. Бурбаки пишет о работах Фреге: «Его работы отличаются чрезвычайной точностью и подробностью анализа понятий» [8, с. 19]. В работе «Запись о понятиях. Формульный язык чистого мышления, построенный по образцу арифметического» (1879) Фреге ввел понятие предиката как логической функции и систематически

изложил построенное им ставшее классическим исчисление предикатов с отношением равенства. Более усовершенствованное изложение приведено им в двухтомнике «Основные законы арифметики» (1893, 1903).

Для не знакомых с понятием предиката в математической логике приведем соответствующие определения в современной записи. В традиционной (формальной, не математической) логике, идущей от Аристотеля, понятие «предикат» означает «сказуемое» в высказывании, т. е. то, что говорится об объекте – «подлежащем». Например, в высказывании «S есть P» S является подлежащим, а P – сказуемым. В математической логике понятие «предикат» имеет иной смысл: оно выступает как логическая функция, а именно: n-местным предикатом называется функция $P(x_1,\dots,x_n)$, которая каждому упорядоченному набору $(x_1,\dots,x_n)$ объектов x_i (предметных переменных) ставит в соответствие некоторое высказывание. Поскольку каждое высказывание принимает одно из двух значений 0 («ложь») и 1 («истина»), то говорят, что то же значение принимает и предикат при фиксированном наборе переменных x_i. При $n=1,2,3$ переменные обычно обозначают без индексов. При $n=1$ предикат называют «свойством» и обозначают $P(x)$ (например, $P(x)$: x – простое число), а при $n>1$ – отношением (например, при $n=2$ отношение $P(x,y)$: $x<y$). Сами высказывания тоже относят к предикатам, называя их 0-местными предикатами.

Желая обойтись минимальным количеством понятий, Фреге в качестве основных логических операций берет импликацию (следование) и отрицание, для обозначения которых вводит своеобразную графическую символику. Все остальные логические операции он выражает через импликацию и отрицание. Кроме того, Фреге вводит понятие «общности», т. е. квантор общности («для любого x»). Вместо нынешней записи $\forall x P(x)$ («для любого x выполняется свойство $P(x)$») Фреге использует своеобразное графическое обозначение. Вместо квантора существования Фреге использует отрицание квантора общности. Его графический символ для квантора существования выражает то, что мы записываем в виде $\neg \forall x \neg P(x)$ это равносильно записи $\exists x P(x)$. Творчеству Фреге посвящена большая статья В. В. Мадера «О логико-арифметической концепции Готлоба Фреге» [21, вып. 30, 1986, с. 261–305], там же на с. 264 приведены и графические обозначения Фреге

основных логических понятий, которыми он пользуется. Н. Бурбаки пишет: «К сожалению, принятые им символы маловыразительны, страшно сложны для типографского набора и слишком далеки от применяемых в математической практике; в результате все это оттолкнуло математиков и значительно снизило влияние Фреге на современников» [8, с. 19]. Но во второй половине XX в. повысился интерес к теоретическому наследию Фреге, очень возросло число публикаций, посвященных его логической системе, проведен ряд международных фрегевских конференций.

Английский математик и логик **Чарльз Сандерс Пирс (1839–1914)** разрабатывал математическую логику в 1867–1985 гг. Независимо от Фреге он ввел в 1885 г. кванторы и сам термин «квантор». Пирс использует обозначение $\prod_x$ для квантора общности и $\sum_x$ для квантора существования, ссылаясь на то, что эти обозначения предложил его соотечественник О. Митчелл. О введении современных обозначений $\forall$ и $\exists$ кванторов см. ниже на с. 178–179.

Продолжим рассматривать логико-арифметическую концепцию Фреге. Прежде чем перейти к главной цели своих исследований – построению натурального ряда чисел чисто логическими средствами – Фреге в работе «Основания арифметики: Логико-математическое исследование понятия числа» (1884) критически анализирует предпринятые до него попытки определения натуральных чисел. В работах «Функция и понятие» (1891), «О смысле и значении. О понятии и предмете» (1892) он уточнил семантику (смысл) понятий и высказываний, рассмотрел отношение между понятием (как одноместным предикатом) и объемом понятия (классом предметов, подпадающих под понятие), обобщил понятие функции, допустив любые предметы в качестве ее аргументов, подверг логическому анализу естественный язык. Поэтому Фреге считают основоположником семантики. В ряде вопросов здесь его предвосхитил Б. Больцано в своем труде «Наукоучение», см. с. 63–65 нашего очерка о Больцано в [289]. Философская позиция Фреге, как и у Больцано, Эрмита и Кантора, – это, по существу, позиция логико-математического платонизма. Фреге приписывает объектам логики и математики некий род реального бытия («бытие истины»), которое не зависит от мыслящего субъекта. Фреге писал: «Математик не может создавать

произвольные объекты, он может только открыть то, что существует, и назвать его». Согласно Фреге, «законы логики – суть законы бытия истины».

Выполнив указанные выше предварительные исследования, Фреге в фундаментальном двухтомном труде «Основные законы арифметики» (1893, 1903) изложил в усовершенствованной форме свою логико-математическую систему и с ее помощью построил натуральный ряд чисел. Здесь он использует в качестве исходных логических операций импликацию и отрицание, вводит несколько нужных ему логических функций, формулирует свои «основыне законы логики», приводит правила вывода, строя таким образом свое исчисление предикатов. Фреге не пользуется языком теории множеств, справедливо считая, что разрабатываемая в то время немецким математиком Г. Кантором (1845–1918) «наивная» (неаксиоматическая) теория множеств еще не обоснована. Но Фреге постоянно имеет дело и с такими объектами, которые могут представить собой актуально бесконечные множества, например с объемом понятия (классом предметов).

Фреге называет понятия P и Q равносильными, если между их объемами можно установить взаимно однозначное соответствие. За численность понятия P он принимает объем понятия «быть равночисленным понятию P». Фреге определяет число 0 как численность пустого понятия, а число 1 – как объем понятия «быть равночисленным понятию, объем которого состоит из единственного числа нуль.» Введенная Фреге «численность понятия» есть логический аналог кардинального числа (мощности) множества X как класса всех множеств, эквивалентных (равномощных) множеству X. Число 0 – это кардинальное число пустого множества, а число 1 – кардинальное число множества $\{0\}$, состоящего из единственного элемента 0. Таким образом, число 1 есть класс всех одноэлементных множеств.

Далее Фреге вводит для численностей отношение непосредственного следования, индукцией – отношение $<$ («меньше»); дает общее определение числа (целого неотрицательного) как неотрицательной численности. После этого устанавливается наличие линейного порядка для чисел и вводится символ ∞ как численность понятия, под которое подпадают все натуральные числа, включая число 0.

Фреге был первым из логицистов, кто попытался обосновать арифметику средствами самой математической логики. Но его логическая система таила в себе противоречие. В 1902 г., когда Фреге закончил работу над своим главным трудом «Основные законы арифметики», он получил письмо от английского логика и математика **Бертрана Рассела (1872–1970)**, в котором сообщалось об открытиии антиномии (парадокса) Рассела в теории множеств, а следовательно, и в логической системе Фреге.

Парадокс Рассела заключается в следующем. В теории множеств Кантора (тогда еще не аксиоматизированной) допускались как множества, не являющиеся своим элементом (например, множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел не является натуральным числом), так и множества, являющиеся своим элементом (например, множество абстрактных понятий есть абстрактное понятие, конечное множество примыкающих друг к другу отрезков на прямой само является отрезком прямой). Пусть K – множество множеств, не являющихся своим элементом. Является ли K своим элементом или нет?

Допустим, что множество K является своим элементом, т. е. $K \in K$. Тогда по определению множества K получаем, что $K \notin K$.

Допустим, что множество K не является своим элементом, т. е. $K \notin K$. Тогда по определению множества K получаем, что $K \in K$.

Таким образом, каждое из возможных предположений приводит к противоречию.

Парадокс Рассела ставил под удар понятие множества множеств, а у Фреге – «объем понятий».

В ответном письме Расселу в 1902 г. Фреге пишет: «Обнаруженное Вами противоречие было величайшей неожиданностью для меня, и я даже мог бы сказать, что оно меня потрясло, так как оно явилось причиной того, что были поколеблены основания, на которых я пытался построить арифметику». В течение ряда лет Фреге безуспешно пытался устранить противоречия в своей системе, вызванные парадоксом Рассела, и в конце жизни разуверился в том, что арифметику можно полностью обосновать с помощью одной только логики. Есть в теории множеств и в логической системе Фреге и противоречие, вызванное парадоксом Греллинга (1908 г.), также основанном на использовании отношения $x \notin x$ для некоторых объектов. В 1919 г.

Рассел популяризоровал свой парадокс на примере деревенского парикмахера, которому было строго указано брить тех и только тех жителей деревни, которые не бреются сами. Вопрос о том, брить ли парикмахеру себя или не брить, является противоречивым.

Парадокс Рассела и другие парадоксы в теории множеств, обнаруженные в конце XIX в. и в начале XX в., показали, что не всякое множество допустимо рассматривать в математике. Очередная попытка обоснования арифметики, а следовательно, и всех основанных на ней разделов математики, была предпринята Б. Расселом и А. Н. Уайтхедом в их фундаментальном труде «Основания математики» (1910–1913. – Т. 1–3), где удалось освободиться от известных парадоксов в логике и теории множеств. Но полностью обосновать математику им не удалось [179; 213].

В XIX в. разрабатывался и аксиоматический подход к постоению арифметики, в котором натуральные числа определяются как объекты, удовлетворяющие системе аксиом. Первые шаги в этом направлении сделал Герман Грассман, который в 1861 г. дал определение сложения и умножения целых чисел и доказал их основные свойства (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность) посредством одной только операции прибавления единицы и принципа математической индукции. Лишь в 1888 г. немецкий математик **Рихард Дедекинд (1831–1916)** сформулировал систему аксиом арифметики, содержащую, в частности, точную формулировку принципа полной математической индукции.

Итальянский математик и логик **Джузеппе Пеано (1858–1932)** родился в Спинетте недалеко от Турина. В 1880 г. окончил Туринский университет и затем преподавал в нем (с 1890 г. – профессор), а в 1886–1891 гг. – также в Туринской военной академии. Главные работы Пеано посвящены основаниям математики, математической логике и анализу. Его имя носит одна из форм остаточного члена формулы Тейлора, а также пример непрерывной кривой, проходящей через каждую из точек квадрата. Он первым дал определение интеграла Римана через совпадение верхнего и нижнего интегралов Дарбу, а в книге «Геометрические приложения анализа бесконечно малых» (1887) на 5 лет раньше Жордана ввел меру множеств, получившую позже название «меры Жордана». Там же Пеано ввел вектор-функции множеств, а также дифференцирование и интегрирование одной функции по другой, предвосхитив теорию интеграла, созданную нидерландским математиком

Т. И. Стилтьесом (1856–1894). В теории обыкновенных дифференциальных уравнений имя Пеано носит одна из теорем существования решения.

В 1891 г. Пеано создал систему аксиом арифметики, которая носит его имя. Она мало отличаться от системы аксиом Дедекинда, предложившего ее тремя годами ранее. Пеано предложил для геометрии несколько аксиоматических систем, одна из которых была основана на идеях немецкого математика Морица Паша (1843–1930), разработавшего впервые после Евклида систему аксиом геометрии.

Используя идею Лейбница о создании символического языка, Пеано вместе с группой своих учеников подготовил и издал на французском языке обширный труд «Формуляр математики» (1892–1899), содержащий изложение математической логики и ряда разделов математики в символическом виде. Использованная там символика близка к применяемой в математике и содержит хорошо подобранные сокращенные обозначения. Здесь также даны определения функции, образа и прообраза, сделано замечание о том, что последовательность есть функция на множестве всех натуральных чисел. В 1895 г. Пеано ввел современный знак $\in$ принадлежности, а в 1888 г. – нижнюю и верхнюю дужки полуокружностей для пересечения и объединения, которые позже превратились в современные знаки $\cap$ и $\cup$. В «Формуляре математики» широко используются перевернутые буквы, в частности $\exists$ – первая перевернутая буква во французском слове *exister* – «существовать», принятая в XX в. в качестве знака для квантора существования. Знак $\forall$ для квантора общности ввел немецкий математик Герхард Генцен (1909–1945) от немецкого слова *all* – «весь, всякий, каждый». (В «Формуляре математики» знак $\uparrow$ означал «каждый», а знак $\downarrow$ – «какой-нибудь», «некоторый».)

Возникновение и становление, начиная с 40-х гг. XIX в., математической логики как науки имело большое значение для ее дальнейшего развития в XX веке и обоснования математики.

Об истории развития математической логики: [107, гл. 1; 21, вып. 30, с. 261–305; 179, гл. 8–12; 213; 188, с. 170–193].

ЛИТЕРАТУРА

а) общая для всех периодов развития математики

1. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: В 3-х т. / Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970–1971. – Т. 1–3.
2. Хрестоматия по истории математики: Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия / Сост. И. Г. Башмакова и др. Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1976. – 320 с.
3. Хрестоматия по истории математики: Математический анализ. Теория вероятностей / Сост. И. Г. Башмакова и др. Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1977. – 224 с.
4. Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики, вып. 1–4. – М.; Л.: ГТТИ, 1932; 2-е изд. – М.; Л.: ОНТИ, 1935.
5. Рыбников К. А. История математики. – 2-е изд. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974. – 454 с.
6. Рыбников К. А. Возникновение и развитие математической науки. – М.: Просвещение, 1987. – 160 с.
7. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. – 5-е изд., испр. / Пер. с нем. И. Б. Погребысского. – М.: Наука, 1990. – 254 с.
8. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1963. – 291 с.
9. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты: Очерки по истории математики. – М.: Мир, 1986. – 432 с.
10. Болгарский Б. В. Очерки по истории математики. – Минск: Вышэйшая шк., 1974. – 367 с.
11. Шереметевский В. П. Очерки по истории математики. – М.: Учпедгиз, 1940. – 179 с.
12. Глейзер Г. И. История математики в школе: Пособие для учителей: В 3-х кн. – М.: Просвещение, 1981–1983.
13. Математический энциклопедический словарь. – М.: Сов. энцикл., 1988. – 848 с.
14. Боголюбов А. Н. Математики, механики: биографический справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 639 с.
15. Бородин А. И., Бугай А. С. Выдающиеся математики: биографический словарь-

справочник. – К.: Рад. шк., 1987. – 656 с.

16. Бородин А. И., Бугай А. С. Биографический словарь деятелей в области математики. – К.: Рад. шк., 1979. – 608 с.
17. Бородін О. І., Бугай А. С. Біографічний словник діячів у галузі математики. – К.: Рад. шк., 1973. – 552 с.
18. Конфорович А. Г. Колумби математики. – К.: Рад. шк., 1982. – 224 с.
19. Чистяков В. Д. Рассказы о математиках. – Минск: Вышэйшая шк., 1966. – 409 с.
20. Шеренга великих математиков. – Варшава: Наша ксенгарня, 1970. – 187 с.
21. Историко-математические исследования. – М.: Наука. (Сборники выходили в 1948–2002 гг.)
22. Колмогоров А. Н. Математика в ее историческом развитии. – М.: Наука, 1991. – 224 с.
23. Александрова Н. В. Математические термины. – М.: Высшая шк., 1978. – 189 с.

б) к периодам древности и средних веков

24. Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука: математика древнего Египта, Вавилона и Греции. – М.: Физматгиз, 1959. – 459 с.
25. Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. – М.: ГИТТЛ, 1967. – 368 с.
26. Нейгебауэр О. Точные науки в древности. – М.: Наука, 1968. – 224 с.
27. Кольман Э. История математики в древности. – М.: Физматгиз, 1961. – 235 с.
28. Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века. – М.; Л.: ГТТИ, 1932 (1938). – 230 с.
29. Фрагменты ранних греческих философов. – Ч. I / Подготовил А. В. Лебедев. – М.: Наука, 1989. – §§ 11, 14, 18, 29, 42, 43, 58.
30. Башмакова И. Г. Лекции по истории математики в древней Греции. – [21], 1958. – Вып. 11. – С. 225–438.
31. Жмудь Л. Я. Пифагор и его школа. – Л.: Наука, 1990. – 192 с.
32. Боро В. и др. Живые числа: Пять экскурсий. – М.: Мир, 1985. – 128 с.
33. Чистяков В. Д. Три знаменитые задачи древности. – М.: Учпедгиз, 1963. – 96 с.
34. Прасолов В. В. Три классические задачи на построение: удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга. – М.: Наука, 1992. – 80 с.

35. Зубов В. П. Аристотель. – М.: Наука, 1963. – 366 с.
36. Архимед. Сочинения. – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с.
37. Лурье С. Я. Архимед. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1945. – 271 с.
38. Башмакова И. Г. Становление алгебры. – М.: Знание, 1979. – 64 с.
39. Башмакова И. Г. Диофант Александрийский и его «Арифметика» // Диофант. Арифметика и книга о многоугольных числах. – М.: Наука, 1974. – С. 5–27.
40. Башмакова И. Г., Славутин Е. И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
41. Башмакова И. Г. Диофант и диофантовы уравнения. – М.: Наука, 1972. – 68 с.
42. Березкина Э. И. Математика древнего Китая. – М.: Наука, 1980. –311 с.
43. Юшкевич А. П. История математики в средние века. – М.: Физматгиз, 1961.– 448 с.
44. Володарский А. П. Очерки истории средневековой индийской математики. – М.: Наука, 1977. – 183 с.
45. Володарский А. П. Ариабхата. – М.: Наука, 1977. – 112 с.
46. Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А. Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды (VIII – XVII вв.): В 3-х кн. – М.: Наука, 1983. – Кн. 1–3.
47. Матвиевская Г. П. Очерки по истории тригонометрии. – Ташкент: Фан, 1990. – 160 с.
48. Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми: Сборник статей к 1200-летию со дня рождения. – М.: Наука. 1983. – 264 с.
49. Кедров Б. М., Розенфельд Б. А. Абу Рейхан Бируни. – М.: Наука, 1973. – 55 с.
50. Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Омар Хайям. – М.: Наука, 1965. – 191 с.
51. Розенфельд Б. А. История неевклидовой геометрии. – М.: Наука, 1976. – 413 с.
52. Симонов Р. А. Кирик Новгородец. – М.: Наука, 1980. – 112 с.
53. Кымпан Ф. История числа π. – М.: Наука, 1971. – 216 с.
54. Гребеников Е. А. Николай Коперник. – М.: Мол. гвардия, 1982. – 147 с.
55. Белый Ю. А. Иоганн Мюллер (Региомантан). – М.: Наука, 1985. – 128 с.
56. Гутер Р. С, Полунов Ю. Л. Джироламо Кардано. – М.: Знание, 1980. – 192 с.
57. Никифоровский В. А. Из истории алгебры XVI – XVII вв. – М.: Наука, 1979. –

208 с.
58. Никифоровский В. А. В мире уравнений. – М.: Наука, 1987. – 173 с.

в) к истории математики в Новое время

59. Юшкевич А. П. Из истории возникновения математического анализа. – М.: Знание, 1985. – 48 с.
60. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: В 2-х т. – М.: ГИТТЛ, 1955. – Т. 1. – С. 411–433; 1956. – Т. 2. – С. 176–178, 291–293, 356, 424–456. (Здесь содержатся очерки о возникновении и развитии математического анализа.)
61. Цейтен Г. Г. История математики в XVI и XVII веках. – М.; Л.: ГТТИ, 1933 (1938). – 430 с.
62. Гиршвальд Л. Я. История открытия логарифмов. – Х.: Изд-во ХГУ им. А. М. Горького, 1952. – 32 с.
63. Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. Джон Непер (1550–1617). – М.: Наука, 1980. – 224 с.
64. Белый Ю. А. Иоганн Кеплер (1571 – 1630). – М.: Наука, 1971. – 296 с.
65. Кузнецов Б. Г. Галилей. – М.: Наука, 1964. – 326 с.
66. Декарт Р. Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1938. – 296 с.
67. Матвиевская Г. П. Рене Декарт. – М.: Наука, 1976. – 271 с.
68. Ферма П. Исследования по теории чисел и диофантову анализу. – М.: Наука, 1992. – 320 с.
69. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. – М.: Наука, 1966. – 506 с.
70. Замечательные ученые / Под ред. С. П. Капицы. – М.: Наука, 1980. – 192 с.
71. Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. – М.: Наука, 1981. – 92 с.
72. Никифоровский В. А., Фрейман Л. С. Рождение новой математики. – М.: Наука, 1976. – 300 с.
73. Фрейман Л. С. Творцы высшей математики. – М.: Наука, 1968. – 256 с.
74. Белл Э. Т. Творцы математики. – М.: Просвещение, 1979. – 256 с.
75. Кляус Е. М., Погребысский И. Б., Франкфурт У. И. Паскаль. – М.: Мысль, 1971. – 430 с.

76. Тарасов Б. М. Паскаль. – М.: Мол. гвардия, 1982. – 334 с.
77. Конфорович А. Г. У пошуках інтеграла. – К.: Рад. шк., 1990. – 256 с.
78. Никифоровский В. А. Путь к интегралу. – М.: Наука, 1985. – 192 с.
79. Медведев Ф. А. Развитие понятия интеграла. – М.: Наука, 1974. – 424 с.
80. Песин И. Н. Развитие понятия интеграла. – М.: Наука, 1966. – 208 с.
81. Франкфурт У. И., Френк А. М. Х. Гюйгенс. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 327 с.
82. Вавилов С. И. Исаак Ньютон (1643 – 1727). – М.: Наука, 1989. – 272 с.
83. Карцев В. П. Ньютон. – М.: Мол. гвардия, 1987. – 416 с.
84. Исаак Ньютон: Сб. статей к 300-летию со дня рожд. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1943.
85. Юшкевич А. П. О математических рукописях Ньютона. – [21], 1977. – Вып. 22. – С. 127–192.
86. Арнольд В. И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. – М.: Наука, 1989. – 96 с.
87. Погребысский И. Б. Готфрид Вильгельм Лейбниц (1644 – 1716). – М.: Наука, 1971. – 320 с.
88. Юшкевич А. П. Лейбниц и основания исчисления бесконечно малых // Успехи матем. наук, 1948. – Т. 3. – Вып. 1(23). – С. 150–164. Там же: Избранные отрывки из матем. сочинений Лейбница / Составил и перевел А. П. Юшкевич. – С. 165–204.
89. Лопиталь Г. Ф. де. Анализ бесконечно малых. – М.; Л.: ГТТИ, 1935. – 432 с.
90. Никифоровский В. А. Великие математики Бернулли. – М.: Наука, 1984. – 177 с.
91. Григорьян А. Т., Ковалев Б. Д. Даниил Бернулли (1700 – 1782). – М.: Наука, 1981. – 319 с.
92. Тиле Р. Леонард Эйлер. – К.: Вища шк., 1983. – 192 с.
93. Юшкевич А. П. Леонард Эйлер. – М.: Знание, 1982. – 64 с.
94. Котек В. В. Леонард Ейлер. – К.: Рад. шк., 1957. – 84 с.
95. Леонард Эйлер: Сб., посв. 250-летию со дня рожд. – М.: Наука, 1958.– 610 с.
96. Леонард Эйлер: Сб. статей и материалов к 150-летию со дня смерти. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1935. – 239 с.

97. Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. – М.: Наука, 1988. – 519 с.

98. Добровольский В. А. Д’Аламбер. – М.: Знание, 1968. – 31 с.

99. Тюлина И. А. Жозеф Луи Лагранж (1736 – 1813). – М.: Наука, 1977. – 224 с.

100. Жозеф Луи Лагранж: Сб. статей к 200-летию со дня рожд. – М.: Наука, 1937. – 559 с.

101. О квадратуре круга / Сост. Ф. Рудио. Пер. с нем. под ред. и с примеч. С. Н. Бернштейна: 3-е изд. – М.; Л.: Научтехиздат, 1936. – 235 с.

102. Юшкевич А. П. Идеи обоснования математического анализа в XVIII веке // Карно Л. Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых. – М.; Л.: ГТТИ, 1936.

103. Воронцов-Вельяминов Б. А. Лаплас. – М.: Наука, 1985. – 288 с.

104. Боголюбов А. Н. Гаспар Монж (1746 – 1818). – М.: Наука, 1978. – 184 с.

105. Стройк Д. Я. Очерки истории дифференциальной геометрии до XX ст. – М.; Л.: Гостехиздат. – 1941. – 80 с.

106. Молодший В. Н. Основы учения о числе в XVIII в. и начале XIX в. – М.: Учпедгиз, 1963. – 262 с.

107. Математика XIX в.: Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1978. – 255 с.

108. Математика XIX в.: Геометрия. Теория аналитических функций / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1981. – 269 с.

109. Математика XIX в.: Чебышёвское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1987. – 318 с.

110. Бюлер В. Гаусс. – М.: Наука, 1989. – 208 с.

111. Карл Фридрих Гаусс: Сб. статей к 100-летию со дня смерти / Под ред. И. М. Виноградова. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 311 с.

112. Кольман Э. Бернард Больцано. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 224 с.

113. Добровольский В. А. Юность и зрелость Коши // Матем. в школе: Педагогика, 1989. – № 6. – С. 2, 146–149.

114. Молодший В. Н. О. Коши и революция в математическом анализе первой четверти XIX века. – [21], 1978. – Вып. 23. – С. 32–55.
115. Оре О. Замечательный математик Нильс Хенрик Абель. – М.: Физматгиз, 1966. – 343 с.
116. Дальма А. Эварист Галуа – революционер и математик. – 2-е изд. – М.: Наука, 1984. – 112 с.
117. Инфельд Л. Эварист Галуа: Избранник богов. – М.: Мол. гвардия, 1965. – 352 с.
118. Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 года. – М.: Наука, 1968. – 591 с.
119. Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1946. – 247 с.
120. История отечественной математики: В 4-х т., 5-ти кн. / Под ред. И. З. Штокало. – К.: Наук. думка, 1966–1970. – Т. 1–4.
121. Каган В. Ф. Лобачевский и его геометрия. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 304 с.
122. Каган В. Ф. Лобачевский. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 506 с.
123. Лаптев Б. Л. Н. И. Лобачевский и его геометрия. – М.: Просвещение, 1976. – 112 с.
124. Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б. Михаил Васильевич Остроградский. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
125. Конфорович А. Г., Сорока М. О. Остроградський. – К.: Молодь, 1980. – 216 с.
126. Прудников В. Е. Пафнутий Львович Чебышёв. – Л.: Наука, 1976. – 282 с.
127. Демьянов В. П. Рыцарь точного знания. – М.: Знание, 1991. – 192 с.
128. Крылов А. Н. Пафнутий Львович Чебышёв: биографический очерк. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1944. – 31 с.
129. Монастырский М. И. Бернхард Риман. – М.: Знание, 1979. – 64 с.
130. Юшкевич А. П. Развитие понятия предела до Вейерштрасса. – [21], 1986. – Вып. 30 . – С. 11–76.
131. Дорофеева Л. В., Чернова М. Л. Карл Вейерштрасс. – М.: Знание, 1985. – 48 с.
132. Кочина П. Я. Карл Вейерштрасс (1815 – 1897). – М.: Наука, 1985. – 271 с.
133. Кочина П. Я. Софья Васильевна Ковалевская (1850 – 1891). – М.: Наука,

1981. – 312 с.

134. Воронцова Л. А. Софья Ковалевская. – М.: Мол. гвардия, 1959. – 336 с.

135. Юшкевич А. П. О развитии понятия функции. – [21], 1966. – Вып. 17. – С. 123–150. (См. и статью Н. Н. Лузина «Функция» в [13]. – С. 797–804.)

136. Маркушевич А. И. Очерки по истории аналитических функций. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. – 127 с.

137. Медведев Ф. А. Очерки истории теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1975. – 248 с.

138. Полищук Е. М. Софус Ли. – Л.: Наука, 1983. – 214 с.

139. Яглом И. М. Феликс Клейн и Софус Ли. – М.: Знание, 1977. – 64 с.

140. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX ст. – М.: Наука, 1989. – Т. 1. – 455 с.

141. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х т. – М.: Наука, 1987. – Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. – 432 с.; Т. 2. Геометрия. – 416 с.

142. Ожигова Е. П. Шарль Эрмит (1822–1901). – Л.: Наука, 1982. – 288 с.

143. Пуркерт В., Ильгаудс Х. И. Георг Кантор. – Х.: Основа, 1991. – 128 с.

144. Медведев Ф. А. Развитие теории множеств в XIX веке. – М.: Наука, 1965. – 232 с.

145. Медведев Ф. А. Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX – XX вв. – М.: Наука, 1976. – 231 с.

146. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 160 с.

147. Виленкин Н. Я. В поисках бесконечности. – М.: Наука, 1983. – 161 с.

148. Бурова И. Н. Развитие проблемы бесконечности в истории науки. – М.: Наука, 1987. – 134 с.

149. Конфорович А. Г. Нескінченність у математиці. – К.: Рад. шк., 1978. – 94 с.

150. Пархоменко А. С. Что такое линия. – М.: Гостехиздат, 1957.

151. Тяпкин А. А., Шибанов А. С. Анри Пуанкаре. – М.: Мол. гвардия, 1985. – 416 с.

152. Панов М. П., Тяпкин А. А., Шибанов А. С. Анри Пуанкаре и наука начала XX века // Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983, с. 522–559.

153. Цыкало А. Л. Александр Михайлович Ляпунов (1857 – 1918). – М.: Наука, 1988. – 248 с.
154. Шибанов А. С. Александр Михайлович Ляпунов. – М.: Мол. гвардия, 1985. – 336 с.
155. Юшкевич А. П. Исторический очерк // Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – С. 428–458.
156. Добровольский В. А. Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений. – К.: Вища шк., 1974. – 456 с.
157. Григорьян А. Т. Механика от античности до наших дней. – М.: Наука, 1974. – 479 с.
158. Моисеев Н. Д. Очерки развития механики. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1961. – 478 с.
159. Геронимус Я. Л. Очерки о работах корифеев русской механики. – М.: Наука, 1970. – 520 с.
160. Майстров Л. Е. Теория вероятностей: ист. очерк. – М.: Наука, 1967. – 320 с.
161. Майстров Л. Е. Развитие понятия вероятности. – М.: Наука, 1980.
162. Гнеденко Б. В. Из истории науки о случайном. – М.: Знание, 1981. – 64 с.
163. Игнациус Г. И. Владимир Андреевич Стеклов (1864 – 1926). – М.: Наука, 1967. – 212 с.
164. Тумаков И. М. Анри Леон Лебег. – М.: Наука, 1975. – 119 с.
165. Полишук Е. М. Вито Вольтерра. – Л.: Наука, 1977. – 114 с.
166. Полищук Е. М. Эмиль Борель (1871 – 1956). – Л.: Наука, 1980. – 168 с.
167. Рид К. Гильберт. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
168. Николай Николаевич Лузин: Сб. к 100-летию со дня рожд. – М.: Знание, 1983. – 64 с.
169. Добровольский В. А. Дмитрий Александрович Граве. – М.: Наука, 1968. – 112 с.
170. Кравчук М. П. Математика та математики в Київському ун-ті за сто років (1834 – 1934) // Розвиток науки в Київському ун-ті за сто років. – К.: Вид-во Київ. ун-ту, 1935. – С. 34–69.
171. Рыжий В. С. Из истории механико-математического факультета Харьковского университета. – Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2001. – 150 с.

172. Штокало Й. З. Нарис розвитку математики на Україні за 40 років радянської влади. – К.: Вид-во АН УРСР, 1958. – 83 с.
173. Ученые записки матем. отделения физ.-мат. ф-та и Харьк. матем. об-ва, посв. 150-летию ун-та. – Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1956. –Т. 24, серия 4. – 116 с.
174. Бородин А. И. Советские математики. – К.; Донецк: Вища шк., 1982. – 133 с.
175. Очерк развития математики в СССР. – К.: Наук. думка, 1983. – 736 с.
176. Паплаускас А. Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. – М.: 1966. – 276 с.
177. Харди Г. Расходящиеся ряды. – М.: ИЛ, 1951. – 504 с. (Первые две главы содержат исторические сведения.)
178. Левин В. И. Рамануджан – математический гений Индии. – М.: Знание, 1968. – 47 с.
179. Клайн М. Математика: Утрата определенности. – М.: Мир, 1984. – 447 с.
180. Ивс Г., Ньюсом К. В. О математической логике и философии математики. – М.: Знание, 1968. – 48 с.
181. Наумов И. А. Дмитрий Матвеевич Синцов. – Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1955. – 72 с.
182. Яглом И. М. Герман Вейль. – М.: Знание, 1967. – 48 с.
183. Вейль Г. О философии математики. – М.; Л.: Гостехиздат, 1934. – 128 с.
184. Марков А. А. О логике конструктивной математики. – М.: Знание, 1972. – 48 с.
185. Тростников В. Н. Конструктивные процессы в математике. – М.: Наука, 1975. – 256 с.
186. Дьедонне Ж. Дело Никола Бурбаки // Очерки о математике. – М.: Знание, 1973. – С. 44–45.
187. Бурбаки Н. Архитектура математики. – М.: Знание, 1972. – 18 с. (То же в [8]. – С. 245–259.)
188. Закономерности развития современной математики: Методологические аспекты. – М.: Наука, 1987. – 236 с.
189. Українська математична бібліографія. – К.: Вид-во АН УРСР, 1963. – 384 с.
190. Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ? – М.: Наука, 1987. – 128 с.

191. Успенский В. А. Нестандартный, или неархимедов, анализ. – М.: Знание, 1983. – 62 с.

192. Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. Чарльз Бэббедж. – М.: Знание, 1973. – 64 с.

193. Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. От абака до компьютера. – М.: Знание, 1975. – 192 с.

194. Тадеев В. А. От живописи к проективной геометрии. – К.: Вища шк., 1988. – 232 с.

195. Об основаниях геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 528 с.

196. Прудников В. Е. Русские педагоги-математики XVIII – XIX веков. – М.: Учпедгиз, 1956. – 640 с.

197. Математическая энциклопедия: В 5-ти т. – М.: Сов. энцикл., 1977–1985. – Т. 1–5.

198. Биографический словарь деятелей естествознания и техники: В 2-х т. – М.: Изд-во БСЭ, 1958–1959. – Т. 1–2.

199. Математика в СССР за тридцать лет (1917 – 1947). – М.: Физматгиз, 1948. – 1044 с.

200. Математика в СССР за сорок лет (1917 – 1957): В 2-х т. – М.: Физматгиз, 1959. – Т. 1. – 1002 с.; Т. 2. – 820 с.

201. Математика в СССР (1958 – 1967): В 2-х т. – М.: Наука, 1969. – Т.1. – 820 с.; 1970. – Т. 2. – С. 821–1579.

202. Механіко-математичному факультету – 60 (Київський національний ун-т ім. Т. Шевченка). – К., 2000. – 248 с.

203. Очерк истории теории вероятностей // Коваленко И. Н., Гнеденко Б. В. Теория вероятностей. – К.: Вища шк., 1990. – С. 289–321.

204. Добровольский В. А. Основные задачи аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.: Знание, 1980. – 64 с.

205. Добровольский В. А. Василий Петрович Ермаков. – М.: Наука, 1981. – 89 с.

206. Добровольський В. О. Михайло Васильович Остроградський: Нарис життя та діяльності. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2001. – 88 с.

207. Михайло Васильович Остроградський в оцінках сучасників та нащадків: (До 200-річчя з дня народження) / Укладачі Б. П. Зайцев, С. І. Посохов, В. Д. Прокопова. – Х.: НМЦ «СД», 2001. – 96 с.

208. Вчені вузів Одеси: бібліографічний довідник. Вип. 1. Природничі науки (1865–1945). Ч. 2. Математики. Механіки. / Упорядник І. Е. Рикун. – Одеса, 1995. – 176 с.

209. Крехівський В. В., Мартинюк В. Т., Лавренчук В. П. З історії математичного факультету Чернівецького ун-ту. – Чернівці: Рута, 1998. – 19 с.

210. Рыжий В. С. История математики. Ч. 1. Математика в древности и в средние века (Пособие для самообразования). – Х.: Изд-во ХНУ им. В. Н. Каразина, 2003. – 115 с.

211. Біографічний словник науковців (1934 – 2004). – К.: Ін-т матем. НАН України, 2004. –124 с.

212. Колмогоров в воспоминаниях учеников / Ред.-сост. А. Н. Ширяев, подг. текста Н. Г. Химченко. – М.: МЦНМО, 2006. – 472 с.

213. Китчер Ф. и др. Методологический анализ оснований математики. – М.: Наука, 1988. –175 с.

214. Лишевский В.П. Охотники за истиной: Рассказы о творцах науки. – М.: Наука, 1990. – 288 с.

215. Ньютон И. Математические работы / Перевод с лат., вводная статья и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. – М.; Л.: ОНТИ, 1937. – 452 с.

216. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / Перевод с лат. и комментарии А. Н. Крылова. – М.: Наука, 1989. – 690 с.

217. Ворович И. И. Лекции по динамике Ньютона: Современный взгляд на механику Ньютона и ее развитие. – М.; Ижевск: Ин-т компьют. иссл., 2004. – 680 с.

218. Гродзенский С. Я. Андрей Андреевич Марков (1856 – 1922). – М.: Наука, 1987. – 257 с.

219. Игошин В. И. Михаил Яковлевич Суслин (1894 – 1919). – М.: Наука, Физматлит, 1996. – 156 с.

220. Добровольская Э. М. Развитие теории цепных дробей в XVII – XVIII вв.: Автореферат дисс. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук. – М.: 1992. – 17 с.

221. Добровольский В. О., Котек В. В. Роботи з історії математики на Україні за 110 років (1850 – 1960) // Історико-математичний збірник. – К., 1963. – Вип. 4. –

С. 10–36.

222. Вирченко Н. А., Добровольский В. А., Митропольский Ю. А., Смогоржевский А. С. Михаил Филиппович Кравчук (к 75-летию со дня рождения) // Укр. матем. журнал, 1968. – Т. 20, № 1. – С. 85–91.

223. Добровольский В. О. М. П. Кравчук – український математик // Українознавство, 2002. – С. 242–256.

224. Добровольский В. А. Огюстен Луи Коши (к 200-летию со дня рожд.) // Юбилеи науки. – К.: Наук. думка, 1990. – С. 3–8.

225. Галай Г. І., Гриневич Г. Д. Учням про видатних математиків / За ред. доктора фіз.-мат. наук, проф. М. І. Кованцова. – К.: Рад. шк., 1976. – 160 с.

226. Віктор Якович Буняковський: Зб. до 200-річчя з дня народження / Ред. Г. Сита, М. Горбачук, А. Юрачківський. – К.: Ін-т математики НАН України, 2004. – 206 с.

227. Прудников В. Е. В. Я. Буняковский – ученый и педагог. – М.: Учпедгиз, 1954. – 88 с.

228. Ожигова Е. П. Егор Иванович Золотарев (1847–1878). – М.; Л.: Наука, 1966. – 141 с.

229. Йорн Штойдінг. Внесок Вороного в сучасну теорію чисел // Сучасні дослідження з теорії чисел у доступному викладі. – К.: Ін-т математики НАН України, 2009. – 90 с.

230. Георгій Вороний: Вчений, який випередив час на століття. – К.: Ін-т математика НАН України, 2010. – 68 с.

231. Урбанский В. М. Михаил Филиппович Кравчук. – М.: Наука, 2002. – 203 с.

232. Сорока М. Колимська теорема Кравчука. – К.: ВД «Науковий світ», 2010. – 240 с.

233. Вірченко Н. О. Велет української математики. – К.: ВД «Науковий світ», 2012. – 64 с.

234. Рыжий В. С., Николенко И. Г. История математики. Ч. 2. Математика в XVII и XVIII веках. – Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2011. – 286 с.

235. Гроссман Л. Математическая Одесса. Кн. 1. – Одесса: Optimum, 2011. – 131 с., илл.

236. Вірченко Н. Зернини з доріг життя мого… (Спомини). – К.: Задруга, 2011. –

760 с., іл.

237. Добровольський В. Події і факти: біографічні нариси. – К.: Ін-т енцикл. досл. НАН України, 2012. – 354 с.
238. Понтрягин Л.С. Жизнеописание Льва Семеновича Понтрягина, математика, составленное им самим. Рождения 1908, г. Москва. – 2-е изд.. – М.: КомКнига, 2006. – 320 с.
239. Кочина П.Я. Наука. Люди. Годы: Воспоминания и выступления. – М.: Наука, 1988. – 624 с.
240. Jarník V. Bolzano and the foundations of mathematical analysis (On the occasion of bicentennial of B. Bolzano). – Prague, 1981. – 89 p.
241. Valson C.-A. La vie et les travaux du baron Cauchy. – Paris, 1868. – Vol. 1–2.
242. Белхост Б. Огюстен Коши. – М.: Наука, 1997. – 174 с.
243. Рыжий В. С., Николенко И. Г. История математики в 2 ч. Ч. 1: Математика в древности и в средние века.–Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2013. – 184 с., илл.
244. Больаи Я. Appendix. Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида / Пер. В. Ф. Кагана. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
245. Гнеденко Б. В. Михаил Васильевич Остроградский. – М.: ГТТИ, 1952. – 332 с.
246. Гнеденко Б. В. Михаил Васильевич Остроградский. – М.: Знание, 1984. – 64 с.
247. История механики в России. – К.: Наук. думка, 1987. – 392 с.
248. Боголюбов А. Н. Жан Виктор Понселе. – М.: Наука, 1988.
249. Лавринович К. К. Фридрих Вильгельм Бессель. – М.: Наука, 1989. – 319 с.
250. Полак Л. С. Уильям Гамильтон (1805–1865). – М.: Наука, 1993.
251. Галченкова Р. И., Лумисте Ю. Г., Ожигова Е. П., Погребысский И. Б. Фердинанд Миндинг (1806–1885). – Л., 1970. – 224 с.
252. Реньи А. Трилогия о математике (Пер. с венг.) – М.: Мир, 1980. – 376 с.
253. Шаль М. Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. – М., 1883. – Т. 1, 2.
254. Клайн М. Математика: Поиск истины (Пер. с англ.) – М.: Мир, 1988. – 296 с.
255. Маркушевич А. И. Замечательные синусы: Введенияв теорию эллиптических функций. – М.: Наука, 1965. – 92 с.
256. Маркушевич А. И. Некоторые вопросы истории теории аналитических

функций. – [21], 1980. – Вып. 25. – С. 52–70.

257. Белозеров С. Е. Основные этапы развития общей теории аналитических функций. – Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1962. – 312 с.

258. Риман Б. Сочинения. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. – 543 с. / Со вступит. статьей В. Л. Гончарова «О научных работах Римана».

259. Научное наследие П. Л. Чебышева. Сб. статьей. – Вып. 1. Математика. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1955. – 174 с.

260. Ахиезер Н. И. П. Л. Чебышев и его научное наследие // П. Л. Чебышев. Избр. труды. – М., 1955. – С. 843–877.

261. Делоне Б. Н. Петербургская школа теория чисел. – М.; Л.: Изд-во АН СССР. – 1947. – 422 с.

262. Ожигова Е. П. Александр Николаевич Коркин (1837–1908). – Л.: Наука, 1968. – 148 с.

263. Кеджори Ф. История элементарной математики / Пер. с англ. с дополн. И. Ю. Тимченко. – 2-е изд. – Одесса: Матезис, 1917.

264. Александров П. С. Пуанкаре и топология // Успехи матем. наук, 1972. – Т. 27. – Вып. 1. – С. 147–158.

265. Тяпкин А. А. Об истории формирования идей специальной теории относительности // Принцип относительности (сб. статей). – М.: Атомиздат, 1973.

266. Пайс А. Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна. – М.: Наука, 1989. – 568 с.

267. Fraenkel A. Das Leben Georg Cantors // G. Cantor. Gesammelte Abhandlungen. – Berlin, 1932. – S. 452–483.

268. Медведев Ф. А. Теория абстрактных множеств Кантора и Дедекинда // Семиотика и информатика. – 1983. – Вып. 22. – С. 45–80.

269. Кантор Г. Труды по теории множеств / Послесловие А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1985. – С. 373–388.

270. Петрова С. С. О. Хевисайд и развитие символического исчисления. – [21], 1985. – Вып. 28. – С. 98–122.

271. Проблемы Гильберта: Сб. под общей ред. П. С. Александрова. – М.: Наука, 1969. – 240 с.

272. Ханович И. Г. Академик Александр Николаевич Крылов. – Л.: Наука, 1967. – 251 с.
273. Михайло Васильович Остроградський (до 200-річчя з дня народження) / Ред. А. М. Самойленко, Г. М. Сита. – К.: Ін-т математики НАН України, 2001. – 128 с.)
274. Георгій Вороний та його родинне оточення. (Зб. статей) / Ред. Г. М. Сита. – Чернігів: Десна Поліграф, 2012. – 608 с.
275. Акивис М. А. Эли Картан. – М.: Изд-во МЦНМО, 2007. – 325 с.
276. Полищук Е. М., Шапошникова Т. О. Жак Адамар (1865–1963). – Л.: Наука, 1990. – 252 с.
277. Александров П. С. Памяти Э. Нётер // Успехи матем. наук, 1936. – Вып. 2. – С. 255–265.
278. Стяжкин Н. И. Становление идей математической логики. – М.: Наука, 1964. – 304 с.
279. Боголюбов А. Н., Урбанский В. М. Николай Митрофанович Крылов. – К.: Наук. думака, 1987. – 175 с.
280. Ахиезер Н. И. С. Н. Бернштейн и его работы по конструктивной теории функций. – Х.: Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1955. – 112 с.
281. Отто Юльевич Шмидт: Жизнь и деятельность. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 470 с.
282. Данилов Ю. А. Джон фон Нейман. – 2-е изд. – М.: Знание, 1990. – 47 с. (Серия «Математика, кибернетика», №12).
283. Боголюбов А. Н. Николай Николаевич Боголюбов: Жизнь. Творчество. – Дубна, 1996. – 182 с.
284. Воспоминания об академике Н. Н. Боголюбове. – М.: МИАН, 2009. – 177 с.
285. Вейль Г. Полвека математики. – М.: Знание, 1969.
286. Юшкевич А. П. Математика и ее история в ретроспективе. – [188]. – С. 28–74.
287. Математика в поняттях, означеннях і термінах: В 2-х ч. / Мантуров О. В., Солнцев Ю. К., Соркін Ю. І., Федін М. Г. – Рад. шк.., 1986.
288. Рыжий В. С. Из истории механико-математического факультета Харьковского университета (до 2011 года). – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2014. – 356 с.

289. Рыжий В. С., Николенко И. Г. Очерки по истории математики первой половины XIX века. – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2015. – 220 с.

290. Шибасов Л. П., Шибасова З. Ф. История математики: учебное пособие для студентов педвузов. – М.: Знак, 2015. – 375 с.

291. Кочина П. Я. Гёста Миттаг-Леффлер: 1846 – 1927. – М. Наука, 1987. – 224 с.

292. Dauben J. W. Georg Cantor: his Mathematics and Philosophy of the Infinite. – (Massachusets): Harvard Univ. Press, 1979. – 404 p.

293. Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка».

294. Академик Александр Михайлович Ляпунов. – Х.: Изд-во НТУ «ХПИ», 2009. – 280 с.

295. Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983. – 560 с.

296. Сажере Ю. Г. Анри Пуанкаре. – М.: 2001. – 63 с.

297. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М., Л.: Гостехиздат, 1950. – 436 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Наукове видання

Рижий Володимир Семенович

Ніколенко Ірина Геннадіївна

НАРИСИ З ІСТОРІЇ МАТЕМАТИКИ ДРУГОЇ ПОЛОВИНИ XIX СТОЛІТТЯ

(Російською мовою)

Формат Умов. друк. арк. Тираж пр. Зам.